

193
FOLGE, 1960, BAND 5, HEFT 3-4

ANNALEN DER PHYSIK

UNIVERSITY
OF MICHIGAN

MAR 25 1960

PHYSICS
LIBRARY

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 460. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

G. RICHTER
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 15. Januar 1960

Inhalt

A. Deubner und F. Schulz, Berlin: Leitfähigkeitsänderung dünner Kupferoxydschichten bei elektrostatischer Aufladung. Mit 20 Abbildungen	113
J. Wilhelm, Greifswald: Zur radialen Trägerdichteverteilung in Säulen mit mehreren Arten positiver Ionen. Mit 5 Abbildungen	129
D. Bebel, Zeuthen bei Berlin: Zur Energie-Reichweite-Beziehung der Agfa-K2-Kernspuremulsion. Mit 1 Abbildung	144
D. Bebel, Zeuthen bei Berlin: Berechnung und Eichung eines „constant-sagitta“-Schemas für die Agfa-K2-Kernspuremulsion. Mit 6 Abbildungen	157
P. Midecke, Dortmund-Aplerbeck: Elektronenbeugungsuntersuchungen dünner Metallaufdampfschichten und ihre gasinterferenzthoretische Deutung. Mit 11 Abbildungen	174
W. Jellinghaus und M.-P. de Andrés, Düsseldorf: Hall-Effekt und Leitfähigkeit der Eisen-Nickel-Legierungen. Mit 9 Abbildungen	187
K. W. Böer und R. Rompe, Berlin: Raumladungsschwingungen in Halbleitern bei höheren Feldstärken	200
H. Rother, Berlin: Zum Mechanismus diffusionsbestimmter Feldinstabilitäten in Halbleitern bei hohen Feldstärken	203
Z. Málek, W. Schüppel, O. Stemme und W. Andrä, Jena und Prag: Über die einachsige magnetische Anisotropie dünner Schichten und ihre zeitliche Änderung. Mit 3 Abbildungen	211
L. Špaček, Prag: Energie der Blochwände in Eisen und Nickel. Mit 10 Abbildungen	217
G. Kienel, Halle (Saale): Untersuchungen an Silber-Selen-Schichten. Mit 6 Abbildungen	229
T. Tietz, Łódź (Polen): Elektronengruppen im periodischen System der Elemente in der statistischen Theorie des Atoms. Mit 1 Abbildung	237

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,
Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

Druckchriften erhalten Sie unter 32/R.2 • Gasint



Gasinterferometer Modell 10

Verbindet kleine Abmessungen mit niedrigem Gewicht,
einfache Bedienung mit hoher Genauigkeit.

Ideal für Bergwerke, Werkstätten, Tankschiffe, Versuchsstationen

VEB Carl Zeiss JENA

Neu erscheinen

Elektronisches Rauschen

Von Dr. H. PFEIFER

Teil I. Rauschquellen

VI, 302 Seiten mit 90 Abbildungen und 8 Tabellen im Anhang. 8°

In Kunstleder mit Schutzumschlag etwa 20,— DM

Dieses Buch untersucht die Ursachen des Rauschens, das bekanntlich der Übertragung und dem Nachweis elektrischer Signale eine natürliche Grenze setzt. Der Teil I behandelt die Grundlagen für das Arbeiten auf diesem Gebiet und die verschiedenen Rauschquellen: Das Rauschen von Widerständen, Halbleitern, Kristalldioden, Transistoren und das Röhrenrauschen bei niedrigen und hohen Frequenzen (Mikrowellengebiet), das Rauschen von Gasentladungen und den quantenmechanischen Verstärker (Maser).

Der später erscheinende Teil II wird sich mit dem Rauschen elektrischer Grundschaltungen und der Meßtechnik befassen.

Gammastrahlung radioaktiver Substanzen

Von G. W. GORSCHKOW

Übersetzung aus dem Russischen

Deutsche Bearbeitung: Prof. Dr.-Ing. W. HARTMANN

Etwa 150 Seiten mit 48 Abbildungen. 8°. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek Band 27). Geb. etwa 8,— DM

In dem Bändchen werden die Grundlagen der Gammastrahlung, die Strahlung verschiedener radioaktiver Quellen sowie die spezielle sekundäre Gammastrahlung behandelt. Durch viele Berechnungsbeispiele wird es sowohl dem Lernenden als auch dem bereits auf dem Gebiet der angewandten Radioaktivität Arbeitenden nützlich sein.

Lehrbuch der Kernphysik

Herausgegeben von Prof. Dr. G. HERTZ
Band II. Physik der Atomkerne

Etwa 650 Seiten mit etwa 300 Abbildungen. Gr. 8°

In Kunstleder mit Schutzumschlag etwa 32,— DM

Inhalt: Eigenschaften der stabilen Kerne · Kernumwandlungen · Kernprozesse bei extrem hohen Energien · Theorie der Atomkerne · Neutronenphysik.



B. G. Teubner Verlagsgesellschaft · Leipzig

ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE * BAND 5, HEFT 3-4 * 1960

Leitfähigkeitsänderung dünner Kupferoxydulschichten bei elektrostatischer Aufladung

Von A. Deubner und F. Schulz

Mit 20 Abbildungen

Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit werden Untersuchungen der Leitfähigkeitsänderung dünner Kupferoxydul-Schichten bei elektrostatischer Aufladung (Feldeffekt) beschrieben. Leitfähigkeit und Feldeffekt werden in Abhängigkeit von den Herstellungsbedingungen (Sauerstoffdruck, Temperatur, Abkühlung) gemessen. Während die Leitfähigkeit einen auch von anderen Autoren bei kompaktem Material gefundenen Gang mit dem Sauerstoffdruck einer vorübergehenden Temperung aufweist, läßt sich ein Einfluß auf den Feldeffekt wegen der großen Exemplarstreuung nicht nachweisen. Der Effekt zeigt eine starke Abhängigkeit von der umgebenden Gasatmosphäre. Wie zu erwarten, wird die gesamte Schicht durch die Adsorption verschiedener Fremdgase stark beeinflußt.

Im Vakuum wurde der Feldeffekt zwischen -56° und $+30^{\circ}\text{C}$ untersucht. Bei Zimmertemperatur stimmen die Ergebnisse befriedigend mit denen von Zückler¹⁾ überein. Bei tiefen Temperaturen zeigt sich jedoch nach Anlegen des elektrischen Feldes ein bisher nicht beobachtetes Verhalten.

Bose²⁾ und Pohl³⁾ haben schon 1906 versucht, die Leitfähigkeitsänderung dünner Silber- und Platinschichten im transversalen elektrischen Feld zu messen, um so die Zahl der freien Elektronen in Metallen zu bestimmen. Andere Autoren haben später an Graphit⁴⁾ und verschiedenen Metallen⁴⁻⁸⁾ ähnliche Untersuchungen angestellt. Durch die grundlegenden Arbeiten von Shockley und Pearson⁹⁾ wurden Feldeffekt-Messungen als Untersuchungsmethode in die Halbleiterforschung eingeführt.

¹⁾ K. Zückler, Z. Physik **136**, 40 (1953).

²⁾ E. Bose, Physik. Z. **7**, 373, 462 (1906).

³⁾ R. Pohl, Physik. Z. **7**, 500 (1906).

⁴⁾ H. A. Perkins, C. R. Acad. Sci. Paris **175**, 363 (1922); H. A. Perkins, J. Phys. **4**, 246 (1923); H. A. Perkins, Physic. Rev. **25**, 584 (1925).

⁵⁾ E. Perucca, C. R. Acad. Sci. Paris **198**, 456 (1934); E. Perucca, Atti R. Ac. Torino **69**, 166 (1934).

⁶⁾ R. Deaglio, Naturwiss. **22**, 525 (1934); R. Deaglio, Nuovo Cimento **11**, 288, (1934).

⁷⁾ M. Pierucci, Nuovo Cimento **9**, 33 (1932); **11**, 277 (1934).

⁸⁾ A. Deubner, Ann. Physik. **20**, 499 (1934); A. Deubner u. K. Rambke, Ann. Physik **17**, 317 (1956).

⁹⁾ W. Shockley u. G. L. Pearson, Physic. Rev. **74**, 232 (1948).

Herstellung der Kupferoxydul-Schichten

Um bei Messung des Feldeffektes möglichst große relative Widerstandsänderungen zu erhalten, wird man versuchen, dünne Präparate aus dem zu untersuchenden Material herzustellen.

Es wurde im Vakuum auf Quarzplatten der Größe $40 \times 50 \text{ mm}^2$ eine Kupferschicht aufgedampft. Dazu befand sich die sorgfältig gereinigte Quarzplatte in einem Rahmen aus 1 mm starkem Messingblech, das nach Art einer Schablone in der Mitte eine Öffnung von $20,5 \times 30,5 \text{ mm}^2$ frei ließ. Das Kupfer wurde aus einem Molybdänschiffchen im Vakuum auf die Quarzplatte, die sich etwa 7 cm über dem Schiffchen im Rezipienten befand, aufgedampft. Die Schichtdicken wurden sowohl aus den verdampften Mengen und der geometrischen Anordnung als auch aus Wägungen der Quarzplatte

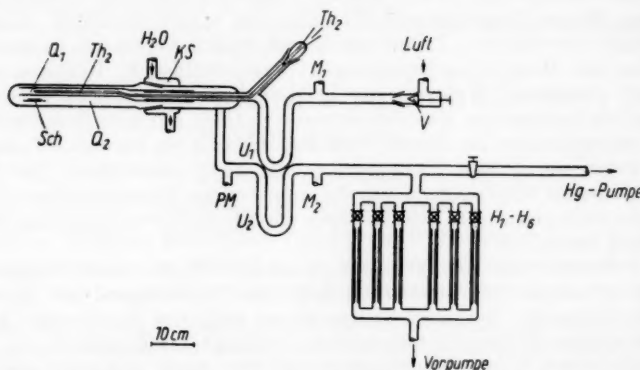


Abb. 1. Druckregelungsapparat. Die mit P_2O_5 getrocknete Luft tritt rechts oben durch das Nadelventil V ein und strömt durch die Kühlfalle U_1 und das Quarzrohr Q_1 in das Quarzrohr Q_2 , in dem sich die Kupferschicht Sch befindet. Dann wird die Luft über die Kühlfalle U_2 von einer Ölvorpumpe über die Kapillardrosseln H_1-H_6 bzw. von einer Quecksilber-Diffusionspumpe und Vorpumpe abgesaugt. PM Pirani-Manometer; M_1 und M_2 Quecksilber-Manometer, KS Kühlschiff; Th_2 Thermoelement. Von links wird der Siliziumstabs über das Quarzrohr geschoben

vor und nach dem Bedampfen zu $0,5-5,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \pm 10\%$ bestimmt. Die so hergestellten Kupferspiegel wurden dann im nächsten Arbeitsgang zu Cu_2O oxydiert.

Während der Oxydation befand sich die Quarzscheibe mit der Kupferschicht in einer nach dem Vorbild von Wagner und Dünwald¹⁰⁾, Blanken-

¹⁰⁾ H. Dünwald u. C. Wagner, Z. physik. Chem. B 17, 467 (1932); C. Wagner, Z. physik. Chem. B 21, 25 (1933); B 22, 181 (1933); B 22, 195 (1933); H. H. v. Baumbach, C. Wagner u. H. Dünwald, Z. physik. Chem. B 22, 226 (1933); H. Dünwald u. C. Wagner, Z. physik. Chem. B 22, 212 (1933); B 24, 53 (1934); C. Wagner, Z. physik. Chem. B 32, 447 (1936); J. Gundermann, K. Hauffe u. C. Wagner, Z. physik. Chem. B 37, 148 (1937); J. Gundermann u. C. Wagner, Z. physik. Chem. B 37, 155 (1937); C. Wagner u. H. Hammen, Z. physik. Chem. B 40, 197 (1938); C. Wagner, K. Grünwald, Z. physik. Chem. B 40, 455 (1938).

burg u. a.¹¹⁾ gebauten, jedoch leicht abgeänderten Durchströmapparat (Abb. 1). Die Größenverhältnisse lassen sich aus der Zeichnung ablesen.

Im Quarzrohr Q_2 befindet sich die Schicht während der Oxydation. Durch das dünne Quarzrohr Q_1 strömt dauernd frische Luft in das einseitig geschlossene Quarzrohr Q_2 . Ein Nadelventil erlaubt die Regelung der über ein mit P_2O_5 gefülltes Trockenrohr einströmenden Luft. In einem durch flüssige Luft gekühlten U-Rohr werden eventuell noch vorhandene Dämpfe ausgefroren. Über eine weitere Kühlfalle wird die Luft aus dem Quarzrohr wahlweise von einer Hg-Pumpe oder über Kapillardrosseln als Strömungswiderstand von einer Vorpumpe abgesaugt. Diese Apparatur gestattete, im Bereich zwischen 10^{-4} und 760 Torr jeden Druck einzustellen. Die Strömungsgeschwindigkeiten bei den praktisch für die Oxydation verwendeten Drucken liegen zwischen $2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Mol } O_2}{\text{sec}}$

und $1,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Mol } O_2}{\text{sec}}$. Mit einer Sauerstoffverarmung in der Nähe der Schicht ist nicht zu rechnen.

Ein selbstgebafter Silitstabofen ergänzte die Oxydationsapparatur. Dieser war auf Rädern und Schienen in horizontaler Richtung beweglich und konnte so über das Quarzrohr geschoben werden. Der Kühlschiff KS verhinderte eine der Glasapparatur unzutragliche Erwärmung.

Die Oxydation der Kupfer-Schichten zu Kupferoxydul erfolgte stets bei einem Sauerstoffpartialdruck von 10 Torr (50 Torr Luft) und 960 °C. Dazu wurde die Schicht in das Quarzrohr Q_2 gebracht und der gewünschte Druck in der Apparatur mit Hilfe des Kapillarsystems und des Nadelventils einge-

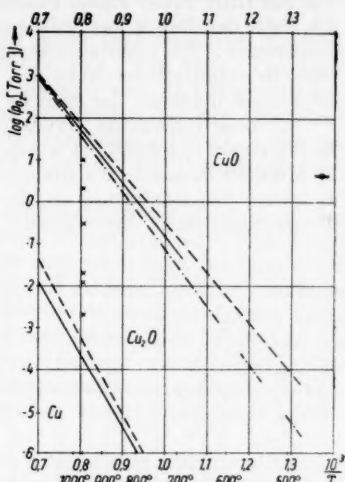


Abb. 2. Existenzgrenzen des Kupferoxyduls nach den Angaben verschiedener Autoren. — — — Aus der Nernstschen Gleichung¹²⁾ berechnet und gemessen¹³⁻¹⁵⁾; — nach Angaben von Wagner und Mitarbeitern¹⁰⁾; - · - · - nach Hauffe¹⁶⁾. Die durch × markierten Punkte geben Temperaturdruck und Temperatur während der Temperung der in dieser Arbeit untersuchten Schichten an; —●— Druck-Temperatur-Bereich der von Zückler¹⁾ untersuchten Schichten

¹¹⁾ G. Blankenburg u. K. Kassel, Ann. Physik 10, 201 (1952); K. Kassel, Ann. Physik 10, 211 (1952); G. Blankenburg, C. Fritzsche u. G. Schubart, Ann. Physik 10, 215 (1952); O. Böttger, Ann. Physik 10, 232 (1952); G. Blankenburg u. O. Böttger, Ann. Physik 10, 241 (1952); G. Blankenburg u. G. Schubart, Ann. Physik 12, 281, (1953); H. Niese, Ann. Physik 12, 297 (1953); C. Fritzsche, Ann. Physik 14, 135 (1954); P. Schmidt, Ann. Physik 14, 265 (1954); G. Blankenburg, Ann. Physik 14, 290 (1954); G. Blankenburg, Ann. Physik 14, 308 (1954).

¹²⁾ W. Nernst, Nachr. königl. Ges. d. Wiss. (Göttingen), math. phys. Kl. (1906).

¹³⁾ W. Biltz, Z. physik. Chem. (A) 67, 561 (1909).

¹⁴⁾ E. Engelhard, Ann. Physik 17, 501 (1933).

¹⁵⁾ H. S. Roberts u. F. H. Smyth, J. Amer. chem. Soc. 43, 1061 (1921).

¹⁶⁾ K. Hauffe, Privatmitteilung zitiert in ¹¹⁾ und H. Schilling, Ann. Physik 16, 84 (1955).

stellt. Dann wurde der schon vorher auf die gewünschte Temperatur gebrachte Silitstabofen über das Quarzrohr geschoben. Die Kontrolle der Temperatur war mit Hilfe zweier Platin-Platinrhodium-Thermoelemente Th_1 , Th_2 möglich. Th_1 hatte den Zweck, bei Anheizen des Ofens den richtigen Temperaturbereich einzustellen. Th_2 erlaubte während der Oxydation die Kontrolle der Temperatur in unmittelbarer Nähe der Schicht. Die Lötstelle von Th_2 befand sich etwa 2 cm oberhalb der Schicht im Quarzrohr Q_1 .

An diese eigentliche Oxydation, die bei allen Schichten unter gleichen Bedingungen durchgeführt wurde, schloß sich für die meisten Schichten eine 20 Minuten dauernde Nachtemperung bei ebenfalls 960 °C, aber jeweils verändertem Sauerstoffdruck an. In der graphischen Darstellung Abb. 2 sind die Temperungsdrucke durch Kreuze markiert. Durch die Temperung sollte der Sauerstoffüberschuß und damit der Störstellengehalt der Schichten systematisch verändert werden.

Nach der Temperung wurde der Ofen weggeschoben. Etwa 20 Sekunden nach Entfernung des Ofens wurde über das Quarzrohr kaltes Wasser gegossen. Innerhalb von insgesamt 90 bis 120 Sekunden war die Temperatur dann auf weniger als 300 °C abgesunken. Diese Zeiten sind viel zu groß, um nach den Angaben von Wagner¹⁰ und Blankenburg¹¹) berechnete Hoffnungen auf ein „Einfrieren“ des durch Temperung hergestellten Zustandes zu erwarten. Diese Behandlung stellt aber die Grenze des dem Quarzrohr noch Zumutbaren dar. Immerhin scheint es doch noch sinnvoll, Temperungen bei verschiedenen Sauerstoffdrücken vorzunehmen, um einen Einfluß auf die Kaltleitfähigkeit zu studieren. Fritzsche¹⁷) hat nämlich auf Grund seiner Messungen die Annahme plausibel machen können, daß die Kaltleitfähigkeit des Kupferoxyduls wesentlich von dem Abstand des Oxydationspunktes im pT -Diagramm von der Stabilitätsgrenze abhängt. In Abb. 3 sind die Kurven gleicher Kaltleitfähigkeit nach Fritzsche

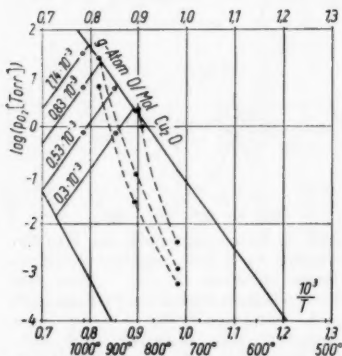


Abb. 3. Die ausgezogenen Geraden sind die von Fritzsche¹¹) aus den Messungen von Wagner und Dünwald¹⁰) (○) konstruierten Geraden gleichen Sauerstoffüberschusses. Bei der geringen Anzahl von Meßpunkten (5 Punkte für 4 Geraden!) lassen sich die Kurven gleichen Sauerstoffüberschusses nur unter der aus der sonst gut bestätigten Wagnerschen Theorie¹⁰) entnommenen Voraussetzung, daß es sich um parallele Geraden handelt, konstruieren. — Gestrichelt (●): Kurven gleicher Kaltleitfähigkeit nach Fritzsche¹¹)

eingetragen (●). Sie laufen fast parallel zu der Existenzgrenze Cu_2O-CuO . Danach kann man annehmen, daß die Oxydation an zwei verschiedenen pT -Punkten, die den gleichen Abstand von der Existenzgrenze haben, zu der gleichen Kaltleitfähigkeit führt. Dieser Abstand wird aber bei der Änderung des Sauerstoffdruckes und festgehaltener Temperatur variiert. Andererseits ist auch vermutet worden, daß die Kaltleitfähigkeit davon abhängt, wo die

¹⁷) C. Fritzsche, Ann. Physik 15, 178 (1955).

Existenzgrenze des Cu_2O überschritten wird. Kühlt man die Proben auf einer Isobaren ab, so hängt dieser Punkt jeweils wieder von dem Druck auf der Isobaren ab.

Die geschilderten Unklarheiten bestehen schon bei kompaktem Material, dem die oberste Schicht abgeschmirgelt wurde¹¹⁾¹⁷⁾. Für dünne Präparate kommen in noch verstärktem Maße Abhängigkeiten vom Abkühlprozeß hinzu. Geringfügige unkontrollierbare Unregelmäßigkeiten bei der Abkühlung verschiedener Schichten können bereits eine vorhandene Beeinflussung der Kaltleitfähigkeit durch den Sauerstoffdruck während der Temperung überdecken.

Jede freie Oberfläche führt eine weitere Komplikation herbei. Auch bei Zimmertemperatur bildet sich auf der freien Oberfläche eine Sauerstoffadsorptionsschicht (O^- , O^{--} , O_2 , O_2^-). Ihr gegenüber liegt im Innern des Cu_2O eine positive Raumladungsschicht, die eine erhöhte Leitfähigkeit längs der Oberfläche besitzt¹⁸⁾¹⁹⁾. Durch adsorbierten Wasserdampf kann diese Leitfähigkeit wieder verringert werden. Bei den untersuchten Schichten, die selbst nur eine Dicke von $1-10\mu$ besitzen, ist sehr wahrscheinlich, daß solche sekundären Oberflächenleitfähigkeitsänderungen eine eventuell vorhandene Abhängigkeit der Leitfähigkeit von den Herstellungs- und Abkühlungsbedingungen bei weitem überdecken.

Nach der Temperung sahen die Schichten gleichmäßig rötlichviolett aus. Von Schicht zu Schicht bestehen nur ganz geringe Farbnuancen. Im Mikroskop zeigt sich, daß die Schichten aus kleinen, dicht aneinandergelagerten Kristalliten mit einem Durchmesser von $5-20\mu$ gebildet wurden. Von der Vorderseite waren die Korngrenzen deutlich sichtbar, von der Rückseite, also durch das Quarzglas betrachtet, dagegen nur in gewissen kleinen Inselbereichen; dazwischen lagen weite Gebiete, in denen sich keine Korngrenzen erkennen ließen. Nach Ablösen der Cu_2O -Schicht zeigten sich keine Spuren auf dem Quarz, die auf eine Reaktion mit dem Oxyd hingewiesen hätten.

Die Schichtdicke wurde aus dem Gewicht der Schicht unter Zugrundelegung einer Dichte von 6 g cm^{-3} zu $0,8-9,9\mu$ bestimmt. Mikroskopische Messungen bestätigen im großen und ganzen diese Werte. Jedoch sind diese Angaben mit einem recht großen Fehler von etwa 20% behaftet. Auch heben sich manche Kristallite etwas über die Oberfläche heraus, so daß die angegebenen Dicken als Mittelwerte der ebenen Bereiche zu betrachten sind.

Unmittelbar nach der Oxydation wurden auf die Schicht zwei Kupferelektroden und ein Erdungsschutzring aufgedampft (Abb. 4). Um den Einfluß des Elektrodenmaterials auf die Leitfähigkeitseigenschaften zu prüfen, wurden auch Silber- oder Aquadagelektroden verwendet. Es konnte keine solche Abhängigkeit nachgewiesen werden.

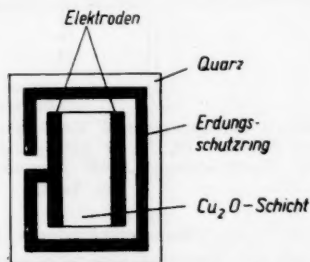


Abb. 4. Kupferoxydschicht mit Meßelektroden und Erdungsschutzring auf Quarzglas

¹⁸⁾ P. Brauer, Ann. Physik (5) 25, 609 (1936).

¹⁹⁾ L. Dubar, Ann. physique 9, 5 (1938).

Meßapparatur

Zur Messung der Leitfähigkeit und der Änderung derselben in einem senkrecht zur Fläche der Schicht angelegten elektrischen Feld befanden sich die Cu_2O -Proben im Vakuum. Abb. 5 zeigt die Versuchsanordnung. Die Quarzscheibe Q wird durch zwei federnde Stifte St gegen die untere ebene Fläche des Kupferklotzes K gepreßt. Auf der dem Kupferklotz abgewandten Seite der

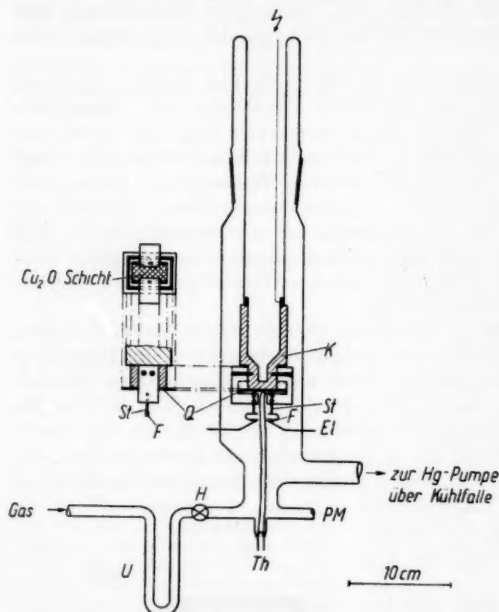


Abb. 5. Meßapparatur. K Kupferklotz; Q Schichtträger mit Schicht; St , F , El Zuführung des Meßstromes; Th Thermoelement; PM Manometer; U Kühlfalle (s. Text)

Durch Einfüllen verschiedener Kältemischungen konnten Messungen unterhalb der Zimmertemperatur ausgeführt werden. Die Temperatur wurde mit einem Eisen-Konstantan-Thermoelement Th , dessen eine Lötstelle direkt an der Schicht lag, gemessen. Der Druck im Versuchsgefäß wurde mittels Pirani-Manometer PM kontrolliert. Über ein Ventil konnten bei Öffnen des Hahnes H verschiedene Gase in die Versuchsapparatur eingelassen werden. Dabei wurden die Dämpfe in einem U-Rohr U durch flüssige Luft ausgefroren.

Der Widerstand der Schichten, der je nach Herstellungsbedingungen und Meßtemperatur zwischen $3 \cdot 10^6$ und $7 \cdot 10^7 \Omega$ lag, wurde in einer Wechselstrombrücke bestimmt. Es stand eine 6-Dekaden-RFT-Präzisions-Wheatstonebrücke, die durch einen Dekadenkondensator zum Phasenabgleich er-

gänzt wurde. Die Stifte St drücken auf die beiden aufgedampften Kupferelektroden der Schicht und stellen so gleichzeitig einen elektrischen Kontakt her. Am unteren Ende der Stifte sind kleine Platinblatfedern F angebracht. Diese drücken auf die Platinkontakte der in die Glaswand eingeschmolzenen Wolframelektroden El . Das System Kupferklotz K -Quarzscheibe Q -Halbleiterschicht (Cu_2O) bildet einen Kondensator. Dieser wird durch Anlegen einer Spannung $U_F = 1-8 \text{ kV}$ an den Kupferklotz aufgeladen. Zwischen den beiden Elektroden El liegt die Meßspannung. Sie beträgt je nach Widerstand der Schicht 5-40 V (etwa 73 Hz). Der Kupferklotz ist innen ausgebohrt.

gänzt war, zur Verfügung (Abb. 6). Als Spannungsquelle diente ein Tonfrequenzgenerator (Clamann & Grahmert). Im Indikatorzweig lag ein Vibrationsgalvanometer. Für die Messung erwies sich wegen der Netzstörungen eine Frequenz von etwa 73 Hz als die günstigste.

Die Messung des Widerstandes der Schichten wurde durch Abgleich der Brücke vorgenommen. Sollten jedoch die Widerstandsänderungen im elektrischen Feld ermittelt werden, so wurde mit einer verstimmten Brücke gearbeitet. Die Lichtbandbreiten des Vibrationsgalvanometers konnten mit Hilfe einer selbstgebauten photographischen Registriereinrichtung über Stunden hin aufgezeichnet werden. Dadurch war es möglich, den zeitlichen Widerstandsverlauf nach Anlegen des Feldes auch bei relativ schnellen Änderungen zu verfolgen. Abb. 7 gibt den Strahlengang im Vibrationsgalvanometer und die Registriereinrichtung schematisch wieder.

Die Aufladung der Schicht erfolgt durch Influenz. Dazu wird die Gegenelektrode (Kupferklotz *K*, Abb. 5) über einen hohen Widerstand ($3 \cdot 10^9 \Omega$) mit 1–8 kV aufgeladen (Zeitkonstante $9 \cdot 10^{-2}$ s). Das Galvanometer ist nicht in der Lage, Widerstandsänderungen während des Aufladevorganges aufzulösen. Bei der Registrierung wurde ein Papiervorschub von 11,9 mm/min gewählt. Das bedeutet, daß der Abklingzeit des Galvanometers ein Papiervorschub von etwa 0,1 mm entspricht.

Einfluß der umgebenden Atmosphäre auf die Leitfähigkeiten der Schichten

Bei den Messungen zeigte sich eine starke Beeinflussung der Leitfähigkeit durch die umgebende Atmosphäre. Die Proben zeigten in Luft einen um den Faktor 2–3 größeren Widerstand als im Vakuum bei einem Druck von etwa 10^{-5} Torr. Dies deckt sich mit den Angaben von Brauer¹⁸⁾, wonach die Oberflächenleitfähigkeit von Cu_2O vom Wasserdampfdruck der umgebenden Atmosphäre abhängt. Auwers²⁰⁾, sowie

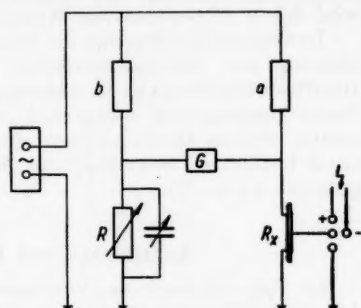


Abb. 6. Schema der Meßbrücke. *a, b, R* Vergleichswiderstände; *R_x* Schicht mit Schichtträger und Hochspannungselektrode

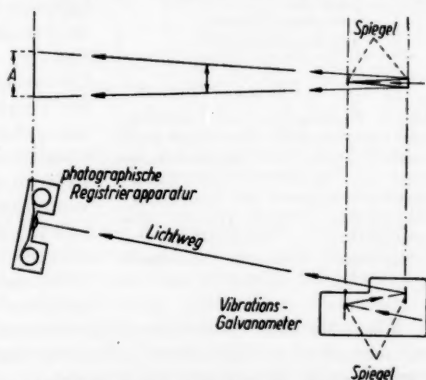


Abb. 7. Strahlengang in Vibrationsgalvanometer und Registrierapparat

²⁰⁾ O. v. Auwers, Naturwiss. 19, 133 (1931).

Sachse und Le Blanc²¹⁾ stellen ein in mancher Hinsicht ähnliches Verhalten fest. Dubar¹⁹⁾ hat durch seine Messungen gezeigt, daß eine Sauerstoffadsorptionsschicht auf Cu_2O eine erhöhte Oberflächenleitfähigkeit erzeugt. Diese wird durch Adsorption von Wasserdampf herabgesetzt.

In neuerer Zeit konnten die Einzelheiten des Adsorptionsvorganges durch Messung von Adsorptionswärmen, Adsorptionsgeschwindigkeiten und der Oberflächenleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Gasbeladung bei verschiedenen Temperaturen weitgehend geklärt werden²²⁾. Auch die Wachstumsgesetze dünner Oxydschichten auf Metall bei Zimmertemperatur konnten unter besonderer Beachtung des Adsorptionsmechanismus zufriedenstellend gedeutet werden²³⁾.

Leitfähigkeit und Herstellungsbedingungen

Im Vakuum wurde der Widerstand nach etwa einer Stunde konstant. In Abb. 8 ist doppellogarithmisch die im Vakuum gemessene Leitfähigkeit über dem Sauerstoffpartialdruck der vorhergegangenen Temperung aufgetragen. Die Kurve (●) zeigt die Leitfähigkeit verschiedener Schichten gleicher Dicke bei Zimmertemperatur, (×) die Leitfähigkeit ein und derselben Schicht bei mehrmaligem „Umtempern“. Zum Vergleich sind darunter die von Blankenburg¹¹⁾ an kompaktem Material gefundenen Verhältnisse eingezeichnet. Die Kurven (×) (●) decken sich, was für die Annahme spricht, daß es sich hierbei nicht um zufällige Unterschiede in der Leitfähigkeit handelt.

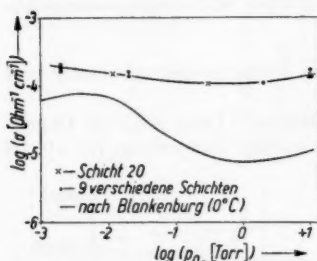


Abb. 8. Abhängigkeit der Leitfähigkeit verschiedener Schichten etwa gleicher Dicke bei Zimmertemperatur im Vakuum von dem Sauerstoffdruck während der Temperung. Schicht 20 (×) wurde zweimal umtempert; — Leitfähigkeit von kompaktem Kupferoxydul nach Blankenburg¹¹⁾

Im Vergleich zu Blankenburg ist die von uns gefundene Abhängigkeit vom Temperungsdruck wesentlich schwächer, jedoch stets im gleichen Sinne. Das könnte man so verstehen, daß wir eine Oberflächenleitung haben, die bei allen Proben gleich, jedoch um etwa eine Zehnerpotenz größer ist als die Volumenleitfähigkeit. Der folgende Befund spricht allerdings gegen diese Deutung:

Wenn wir eine zusätzliche Oberflächenleitung haben, so sollte sich diese bei sehr dünnen Schichten besonders stark bemerkbar machen. Deshalb wurden auch Messungen an Schichten verschiedener Dicke durchgeführt ($d = 0,8-9,9 \mu$). Es konnte jedoch kein systematischer Gang der Leitwerte oder des Feldeffektes mit der Schichtdicke nachgewiesen werden. Die Widerstände aller Schichten gehorchten übrigens zwischen 5 und 50 V dem Ohmschen Gesetz. Die Abweichungen waren kleiner als 0,1%.

²¹⁾ M. Le Blanc u. H. Sachse, Ann. Physik (5) 11, 727 (1931).

²²⁾ W. E. Garner, R. F. S., F. S. Stone u. P. F. Tiley, Proc. Roy. Soc. London 211, 472 (1952); W. E. Garner, T. J. Gray u. F. S. Stone, Disc. Farad. Soc. 8, 246 (1950); R. Derry, W. E. Garner u. T. J. Gray, J. Chim. phys. 51, 670 (1954).

²³⁾ T. B. Grimley u. B. M. W. Trapnell, Proc. Roy. Soc. (A) 234, 405 (1956).

Leitfähigkeit und Temperatur

Durch Einfüllen verschiedener Kältemischungen in den Kupferklotz K konnte die Temperaturabhängigkeit des Feldeffektes und Widerstandes gemessen werden. Die Temperatur wurde mit dem Thermoelement Th (Abb. 5) bestimmt. In der graphischen Darstellung Abb. 9 ist für die Schichten 13, 15, 18, 20A, 20B, 20C der Logarithmus des Widerstandes über der reziproken absoluten Temperatur aufgetragen. Abgesehen von Schicht 13 liegen die Punkte gut auf Geraden, aus deren Steigungen man die Aktivierungsenergie berechnen kann. Diese ist jeweils neben der Geraden in eV angegeben.

Messung des Feldeffektes

Zwischen der Temperatur der Schichten und der ersten Widerstandsmessung lag maximal ein Tag. Die Schichten wurden unmittelbar nach Aufdampfen der Elektroden in die Meßapparatur (Abb. 5) gebracht und diese evakuiert. Nach Anlegen der Meßspannung sank der Widerstand stets um 10–25% des Anfangswertes, um dann nach ein bis zwei Stunden einen konstanten Wert anzunehmen. Erst jetzt begannen die eigentlichen Feldeffektmessungen.

Wird die Gegenelektrode negativ gegen Erde aufgeladen, also die Schicht positiv, so sinkt der Widerstand momentan um $\Delta R_x = R_{xFE} - R_{x0}$ (Abb. 10, 11). Wir nennen ΔR_x „momentane Widerstandsänderung bei Einschalten des Feldes“. Nach dieser momentanen Änderung wächst der Widerstand wieder etwa exponentiell mit der Zeit an und erreicht in 3–5 Minuten einen konstanten Wert $R_{xF\infty}$. Bei der gezeigten Registrierung wurde das Konstantwerden des Widerstandes ($R_{xF\infty}$) nicht abgewartet. Das Charakteristische läßt sich aber gut erkennen. $\delta R_x = R_{xF\infty} - R_{x0}$ heißt „dauernde Widerstandsänderung“. Bei Ausschalten des Feldes vergrößert sich der Widerstand momentan um $\Delta R_x = R_{x0A} - R_{xF\infty}$, um dann erst exponentiell gegen R_{x0} zu gehen. Bei negativer Aufladung der Schicht zeigt sich bei Zimmertemperatur das gleiche Verhalten mit umgekehrtem Vorzeichen. In Abb. 12 sind die momentanen Widerstandsänderungen bei Einschalten (●) und Ausschalten (○) des Feldes in Abhängigkeit von der Feldstärke graphisch dargestellt. Die dauernde Widerstandsänderung δR_x , sowie die Differenz $\delta R_x - \Delta R_x = \delta R_x =$ „nachwirkende Widerstandsänderung“ sind in Abb. 13

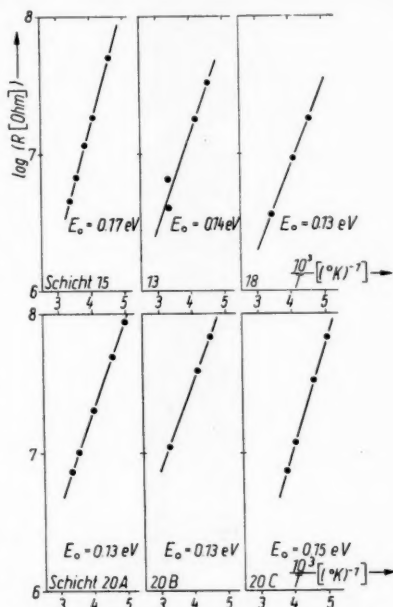


Abb. 9. Abhängigkeit des Widerstandes im Vakuum von der Temperatur. E_0 Aktivierungsenergie in eV

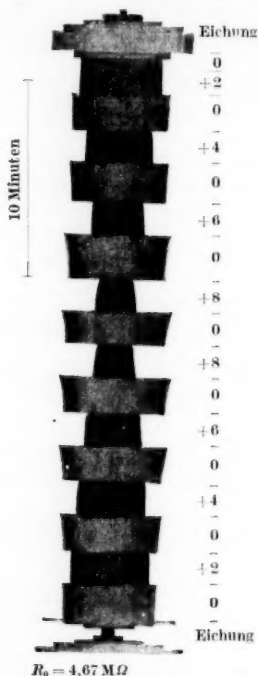
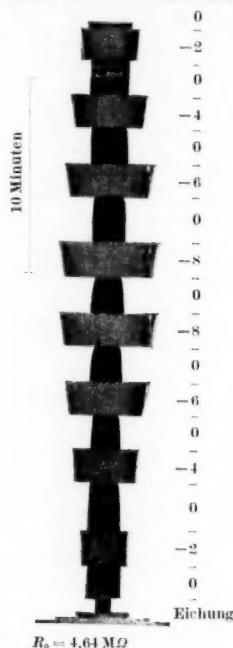
$R_0 = 4,71 \text{ M}\Omega$ Vakuum, 10 V, 23 °C $R_0 = 4,67 \text{ M}\Omega$ Vakuum, 10 V, 23 °C

Abb. 10. Beispiel einer Registrierung der Widerstandsänderung bei Aufladung der Schicht. Temperatur 23 °C; Meßspannung 10 V; R_0 Widerstand der Schicht ohne Feld. Die rechts neben den Registrierungen angegebenen Zahlen bezeichnen die Spannung der Gegenelektrode (Kupferklotz) in kV. Das Vorzeichen bezieht sich auf die influenzierte Ladung der Schicht. Die Widerstandseichung der Brücke erfolgte durch Änderung des Vergleichswiderstandes R (Abb. 6)

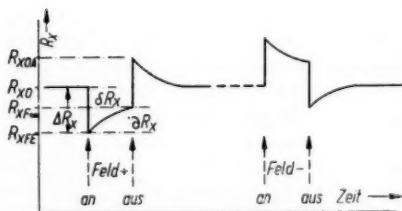


Abb. 11. Widerstandsänderung der Schicht (schematisch). $R_{xFE} - R_{x0} = \Delta R_x$ momentane Widerstandsänderung (etwa gleich $R_{xF0} - R_{x0}$); $R_{xF0} - R_{x0} = \delta R_x$ dauernde Widerstandsänderung; $R_{xF0} - R_{xFE} = \partial R_x$ - $\Delta R_x = \partial R_x$ nachwirkende Widerstandsänderung

zu sehen. Da bei der Registrierung R_{xF0} nicht abgewartet wurde, stellen die eingezeichneten Meßpunkte eigentlich nicht δR_x und ∂R_x im Sinne der gegebenen Definition dar. Wegen der in der Zeit etwa exponentiellen Widerstandsänderung ist aber der qualitative Verlauf in Abb. 13 nicht verfälscht. Da die δR_x bzw. ∂R_x jeweils auf gleiche Zeiten bezogen sind, bedeutet das nur eine kleine, für δ und ∂ freilich entgegengesetzte lineare Maßstabszerrung in Abb. 13.

(Die Definitionen für ΔR_x , ∂R_x , δR_x sind so gewählt, daß ein positiver Wert Widerstandsvergrößerung bedeutet und umgekehrt.)

Der Effekt ist stark von der umgebenden Gasatmosphäre abhängig. Es wurden einige Meßreihen mit verschiedenen Gasen durchgeführt. Die rela-

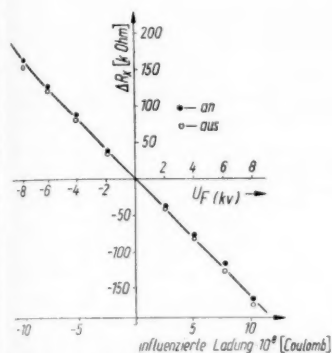


Abb. 12. Die aus der Registrierung Abb. 10 entnommene Widerstandsänderung ΔR_x bei Einschalten (●) und Ausschalten (○) des Feldes in Abhängigkeit von der Aufladung

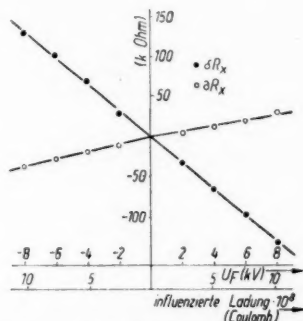


Abb. 13. Widerstandsänderung δR_x (●) und ∂R_x (○) nach Einschalten des Feldes in Abhängigkeit von der Aufladung

tiven Leitwertänderungen pro Flächenladung ($\frac{\Delta S}{S} \cdot \frac{F}{Q}$) sind in der folgenden Tabelle für eine Schicht bei verschiedenen Gasbeladungen der Oberfläche angegeben.

Nr. 43	Vak.	$1,44 \cdot 10^6$	$(A \text{ sec})^{-1} \text{ cm}^2$
Nr. 44	Luft	$2,19 \cdot 10^6$	$(A \text{ sec})^{-1} \text{ cm}^2$
Nr. 45	N_2	$1,89 \cdot 10^6$	$(A \text{ sec})^{-1} \text{ cm}^2$
Nr. 46	O_2	$2,12 \cdot 10^6$	$(A \text{ sec})^{-1} \text{ cm}^2$
Nr. 47	Vak.	$1,49 \cdot 10^6$	$(A \text{ sec})^{-1} \text{ cm}^2$

Feldeffekt und Herstellungsbedingungen

Bevor man versucht, eine Abhängigkeit des Feldeffektes von den Herstellungsbedingungen nachzuweisen, muß man noch etwas näher auf die Reproduzierbarkeit der Messungen eingehen. In Abb. 14a, b sind zwei Beispiele gegeben. (a Schicht 15, b Schicht 18.) In der nächsten Tabelle sind die Steigungen der Geraden $\frac{\Delta S}{S} = f\left(\frac{Q}{F}\right)$ zusammengestellt. Zwischen den Messungen lagen bei Schicht 15 acht Tage, bei Schicht 18 sieben Tage. Die Schichten wurden während dieser Zeit in einem Exsikkator mit Silikagel unter Vakuum aufbewahrt. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, sind die Messungen nur auf 5–15% reproduzierbar.

		$\frac{\Delta S}{S} \cdot \frac{F}{Q}$	
Schicht 15 Reg.	37	$1,74 \cdot 10^6$	$\text{A sec}^{-1} \text{cm}^2$
	56	$1,43 \cdot 10^6$	
Schicht 18 Reg.	39	$1,65 \cdot 10^6$	$\text{A sec}^{-1} \text{cm}^2$
	52	$1,75 \cdot 10^6$	

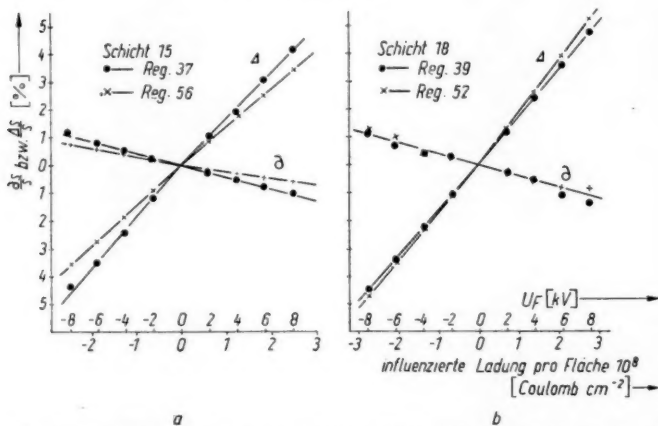


Abb. 14. Beispiel für die Reproduzierbarkeit der relativen Leitwertänderung in Abhängigkeit von der Aufladung. Zwischen der Registrierung 37 (●) und Registrierung 56 (×) lagen 8 Tage (Abb. 14a). Zwischen der Registrierung 39 (●) und Registrierung 52 (×) lagen 7 Tage (Abb. 14b). Die Schichten wurden während dieser Zeit in einem Exsikkator mit Silikagel unter Vakuum aufbewahrt

In der graphischen Darstellung Abb. 15 ist für die Schicht 20A, die zweimal umgetempert wurde (20B, 20C), die relative Leitfähigkeitsänderung in $\frac{\Delta S}{S}$ Coul.

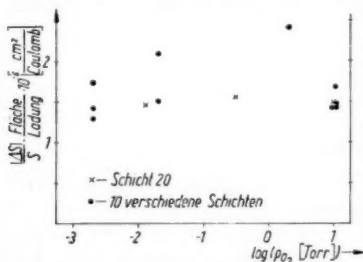


Abb. 15. Relative momentane Leitwertänderungen pro Flächenladung (Mittelwerte bei positiver und negativer Aufladung) über dem Logarithmus des Sauerstoffpartialdruckes während der Temperung der Schichten. Schicht 20 (×) wurde zweimal umgetempert

über dem Sauerstoffpartialdruck der vorangehenden Temperung aufgetragen (×). Die Meßwerte liegen sehr gut innerhalb des für Wiederholung der Messungen ohne vorangehende Temperung festgestellten Schwankungsbereiches. Eine Abhängigkeit des Effektes von den Herstellungsbedingungen ist also nicht nachgewiesen, obwohl der O_2 -Druck fast über 3 Zehnerpotenzen variiert wurde.

In Abb. 15 ist ebenfalls für verschiedene Schichten etwa gleicher Dicke $(4,0-5,2 \mu \pm 20\%) \frac{\Delta S}{S} \cdot \frac{F}{Q}$ in Abhängigkeit von den Herstellungsbedingungen aufgetragen (●). Hier sind die Unterschiede größer als für 20A, 20B, 20C.

Es läßt sich keine Systematik erkennen. Danach kann man also sagen: unter gleichen Bedingungen während der Messung (im Vakuum, Zimmertemperatur) wurde für jede Schicht eine für sie typische relative Leitfähigkeitsänderung gemessen. Innerhalb der auch sonst gefundenen Reproduzierbarkeitsgrenzen hängt dieser Wert nicht vom Sauerstoffdruck der vorangegangenen Temperatur ab.

Feldeffekt bei verschiedenen Temperaturen

An sechs Schichten wurde der Feldeffekt zwischen $+30^\circ$ und -56°C auch in Abhängigkeit von der Temperatur untersucht. Bei noch tieferen Temperaturen war eine Messung mit der Brückenmethode wegen des stark anwachsenden Widerstandes nicht mehr möglich. Die momentane relative Leitfähigkeitsänderung zeigt zunächst mit abnehmender Temperatur eine Zunahme. Zwischen 0° und -28°C liegt ein Maximum. In Abb. 16 ist für verschiedene Meßreihen $\frac{\Delta S \cdot F}{S \cdot Q}$

$= f(T)$ aufgetragen. Die eingezeichneten Punkte sind Mittelwerte aus den momentanen Änderungen bei positiver und negativer Aufladung.

Das Maximum in den Kurven fällt mit einer anderen bemerkenswerten Änderung im Verhalten der Schichten zusammen. Wir haben bisher nur die momentane Änderung bei Auf- oder Entladung betrachtet. Bei der Besprechung des Feldeffektes bei Zimmertemperatur wurde schon darauf hingewiesen, daß der momentanen Änderung noch ein Nachwirkungseffekt mit einer Zeitkonstanten von etwa einer Minute folgt. Dieser Nachwirkungseffekt hatte stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie der momentane (Abb. 10). Bei Temperaturen unterhalb 0°C ändert sich das. Abb. 17 zeigt eine Photokopie der Registrierung 62 (Schicht 20A, -28°C). Bei positiver Aufladung verhält sich die Schicht wie bei Zimmertemperatur, d. h. einer momentanen Widerstandsabnahme folgt ein langsames Ansteigen des Widerstandes. Lädt man die Schicht jedoch negativ auf, so steigt der Widerstand nach der momentanen Zunahme weiter an! In Abb. 18 ist dieses Verhalten schematisch dargestellt. Zum Vergleich sind oben die Verhältnisse bei „hoher Temperatur“ nochmals wiedergegeben. Während also bei Zimmertemperatur sowohl der momentane als auch der nachwirkende Effekt antisymmetrische Funktionen der Aufladung sind, gilt dies bei tieferen Temperaturen nur noch für die momentane Widerstandsänderung. Der nachwirkende Effekt ist „fast“ symmetrisch. Trägt man $\partial S/S$ über der Aufladung auf, so ergeben sich bei Zimmertemperatur Geraden, bei tieferen Temperaturen nach unten offene Parabeln. Für die Registrierung 62 ist das in Abb. 19 graphisch dargestellt. Abb. 20 zeigt den Nachwirkungseffekt ∂S in Abhängigkeit von der Aufladung bei verschiedenen Temperaturen.

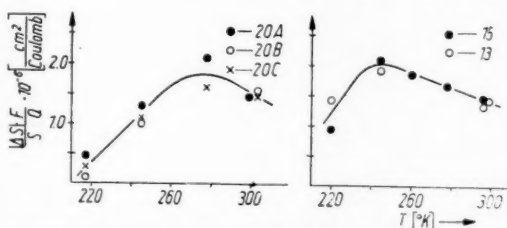


Abb. 16. Temperaturabhängigkeit der relativen momentanen Leitwärtsänderung. Schicht 20 wurde zweimal umgetempert (20A, 20B, 20C)

Ein Vergleich unserer Messungen mit denen anderer Autoren¹⁾⁹⁾ ist recht schwierig. Shockley und Pearson⁹⁾ machen über die Herstellung und die

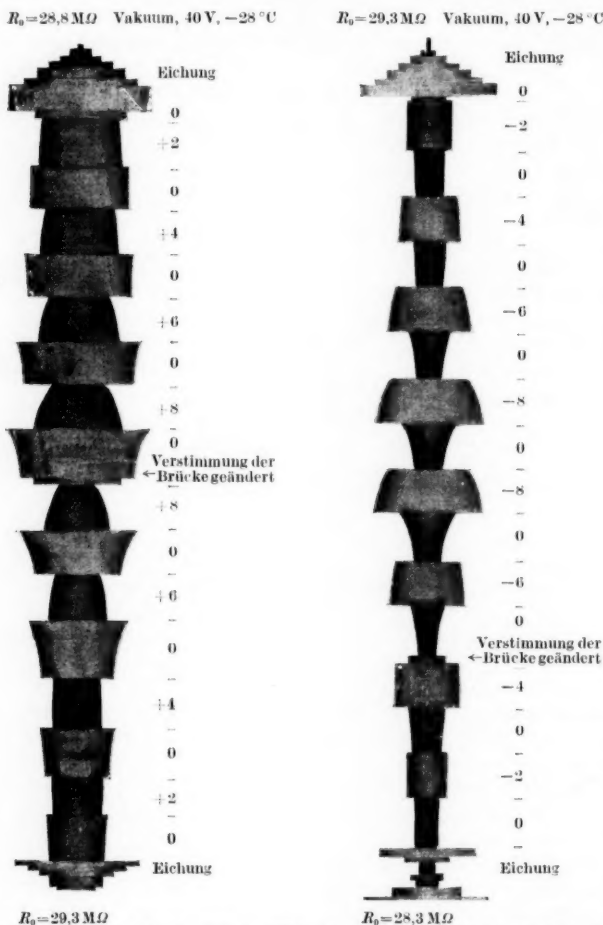


Abb. 17. Beispiel einer Registrierung der Widerstandsänderung bei Aufladung der Schicht. Temperatur -28°C ; Meßspannung 40 V; R_0 Widerstand der Schicht ohne Feld. Die rechts neben den Registrierungen angegebenen Zahlen bezeichnen die Spannung der Gegenelektrode (Kupferklotz) in kV. Das Vorzeichen bezieht sich auf die influenzierte Ladung der Schicht. Die Widerstandseichung der Brücke erfolgte durch Änderung des Vergleichswiderstandes R (Abb. 6)

Dicke ihrer Präparate keinerlei Angaben und bemerken nur, daß die Leitfähigkeitsänderung im Feld von 400000 V/cm etwa 11% betrug. Die von Zückler¹⁾ untersuchten Schichten wurden bei $540\text{--}475^\circ \text{C}$ und 20 Torr

Luft (etwa 4 Torr O_2) oxydiert. Dieser Bereich ist in der graphischen Darstellung Abb. 2 durch \bullet angegeben, liegt also weit außerhalb des Existenzbereiches von Cu_2O . Wenn also überhaupt Kupfer-I-Oxyd vorgelegen hat, kann bei der Oxydation der Gleichgewichtszustand nicht abgewartet worden sein²⁴).

Um aus den gemessenen Leitwertsänderungen die Störstellendichte N_a berechnen zu können, macht Zückler vier Annahmen.

1. Es liege homogene Störstellenverteilung vor.

2. Durch das elektrische Feld werde eine gewisse Randschicht von Ladungsträgern leer geräumt. In dieser Randschicht herrsche Störstellenerschöpfung (alle Störstellen sind dissoziiert). Im quasineutralen Innern der Schicht bestehe Störstellenreserve.

3. Es seien keine Oberflächenzustände vorhanden.

4. Es liege keine wesentliche Oberflächenleitung vor.

Daraus ergibt sich dann

$$N_a = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot U_F \cdot S}{d \cdot D \cdot e_0 \cdot \Delta S}$$

(ϵ_0 = Influenzkonstante, ϵ Dielektrizitätskonstante, U_F Spannung am Kondensator, d Schichtdicke, D Dicke der Quarzscheibe, e_0 Elementarladung)

zu 10^{16} – 10^{17} cm^{-3} . Auf der gleichen Berechnungsgrundlage würden wir für unsere Schichten $N_a = 3,5 \cdot 10^{15}$ – $5,5 \cdot 10^{16}$ cm^{-3} erhalten. Nach den Überlegungen von Zückler dürfte

$\frac{\Delta S}{S}$ nicht von der Temperatur abhängen. Unsere Messungen zeigen

aber das Gegenteil (Abb. 16). Die Verhältnisse sind offenbar sehr viel komplizierter, als Zückler annimmt. Unsere Leitfähigkeitsmessungen bei verschiedenen Gasatmosphären zeigen, daß Voraussetzung 4 nicht richtig ist. Nach den Vorstellungen über den Adsorptionsmechanismus von Fremdgasen an der Oberfläche von Cu_2O ist auch Voraussetzung 1 nicht haltbar. Offenbar steht das „Innere“ der Schichten unter dem Einfluß spontaner Randschichten.

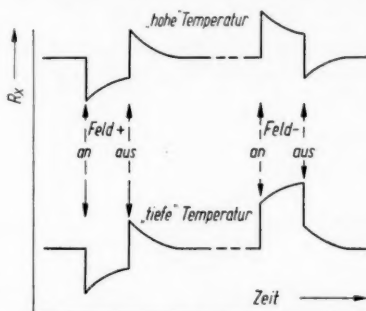


Abb. 18. Vergleich der Widerstandsänderungen bei „hohen“ und „tiefen“ Temperaturen (schematisch)

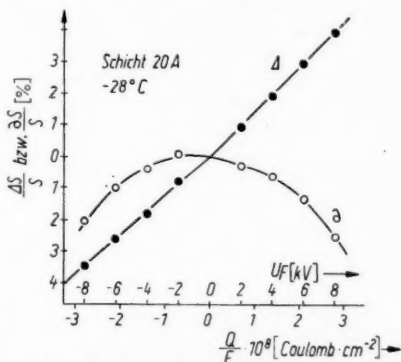


Abb. 19. Momentane (●) und nachwirkende (○) relative Leitwertsänderung bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit von der Aufladung

²⁴) K. Hauffe u. P. Kofstad, Z. Elektrochem. 59, 399 (1955).

Diese haben eine Dicke von 10^{-5} bis 10^{-4} cm. Beachtet man die Porosität der Schichten, so kann man von einer elektrischen Neutralität im Innern (Voraussetzung 2) nicht sprechen. Unter den gegebenen Umständen läßt sich eine quantitative Deutung der Ergebnisse nicht geben.

Auch Zückler hat den Nachwirkungs-Effekt, der sich an die momentane Änderung anschließt, beobachtet. Er berichtet jedoch, daß dieser Effekt bei tiefen Temperaturen (-78°C) weitgehend einfriert. Daraus schließt er, daß

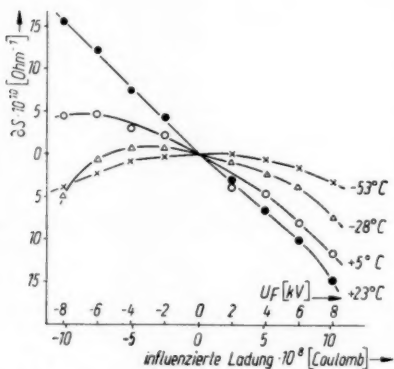


Abb. 20. Nachwirkende Leitwärtsänderung bei verschiedenen Temperaturen in Abhängigkeit von der Aufladung

Auch an Germanium und Silicium sind nach Anlegen eines elektrischen Feldes Relaxationseffekte mit Zeitkonstanten von Minuten beobachtet worden. Die Deutung ist aber auch dort nicht einheitlich. Low²⁵⁾ hat an einigen Kristallen sogar einen langsamen Rückgang auf den Widerstandswert ohne Feld beobachtet, was er mit einem Wechsel der Gasbeladung durch die veränderten Potentialverhältnisse an der Oberfläche gedeutet hat. Dafür spricht auch die von ihm und anderen Autoren²⁶⁾ beobachtete Abhängigkeit der Relaxationszeit von der umgebenden Atmosphäre. Dabei ist aber zu beachten, daß diese Autoren fast ausschließlich an freien Oberflächen gemessen haben. Inwieweit die von ihnen angegebenen Deutungsversuche auf die Messungen der vorliegenden Arbeit übertragen werden dürfen, kann auf Grund der vorliegenden Ergebnisse noch nicht eindeutig entschieden werden. Es wird gegenwärtig versucht, durch Messungen an freien Kupferoxyduldünnschichten die Frage zu klären. Abschließende Ergebnisse liegen noch nicht vor.

²⁵⁾ G. G. E. Low, Proc. Phys. Soc. (B) **68**, 10 (1955).

²⁶⁾ J. Bardeen, R. E. Coovert, S. R. Morrison, J. R. Schrieffer and R. Sun, Phys. Rev. **104**, 47 (1956), hier weitere Literaturangaben.

Berlin, I. Physikal. Institut der Humboldt-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 17. April 1959.

es sich um Ionenwanderung handelt. Unsere Schichten zeigen jedoch ein anderes Verhalten. Von einem „Einfrieren“ kann gar nicht die Rede sein. Bei großen Feldstärken kann der Nachwirkungs-Effekt den momentanen sogar übertreffen. Es zeigt sich bei tiefen Temperaturen eine eigenartige Symmetrie des Nachwirkungs-Effektes (Unabhängigkeit vom Vorzeichen der Aufladung) und ein überproportionales Anwachsen mit steigender Feldstärke. Eine Deutung dafür kann noch nicht gegeben werden. Ob der Unterschied im Verhalten der Schichten auf die Schichtträger (Glimmer bzw. Quarz) zurückgeführt werden kann, ist fraglich.

Er
elektr
Verall
arten
nicht
beleuc
angere
Ionisa
hände

Di
Längs
ladung
fordern
Übers
zeigt,
zwei
chung
Ionen

gesch

mit d

1)
2)
E. H. S.
An

Zur radialen Trägerdichteverteilung in Säulen mit mehreren Arten positiver Ionen

Von Johannes Wilhelm

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Ergänzende Überlegungen zu einem von Seeliger untersuchten einfachen elektronegativen Entladungsmodell gaben Veranlassung, das Problem einer Verallgemeinerung der Schottkyschen Diffusionstheorie auf mehrere Ionenarten und angeregte Neutralteilchen vom Gesichtspunkt proportionaler oder nichtproportionaler Konzentrationsverteilung über den Querschnitt her zu beleuchten. Im folgenden wird der Fall zweier Arten von positiven Ionen und angeregter Atome bei Berücksichtigung von Stoßionisation durch Elektronen, Ionisation durch Metastabile, sowie Umladungsprozessen systematisch behandelt.

Die Verallgemeinerung der Schottkyschen Diffusionstheorie¹⁾ der in Längsrichtung homogenen positiven Säule einer Glimmentladung auf Entladungen mit mehreren Arten von Ionen und angeregten Neutralteilchen erfordert in erster Linie eine Ergänzung hinsichtlich der Trägerbilanz. Eine Übersicht, zusammengestellt aus den in der Literatur²⁾ bekannten Prozessen, zeigt, daß sich eine große Anzahl solcher proportional einer bzw. dem Produkt zweier Konzentrationsarten darstellen läßt. Damit können die Bilanzgleichungen für Elektronen ($\tau = e$), negative ($\tau = -\nu$) und positive ($\tau = +\nu$) Ionen, sowie Angeregte ($\tau = a \nu$) in der Form:

$$\operatorname{div} j_{\tau} = (Q_{\tau} - S_{\tau}) n_{\tau} + (Q_{\tau}^{*} - S_{\tau}^{*}) n_{\tau}^{*} \quad (1)$$

beschrieben werden, wo j_{τ} die Stromdichten und

$$\begin{aligned} Q_{\tau} &= \sum_k \sum_m \gamma_k q_m(k) & Q_{\tau}^{*} &= \sum_{k,l} \sum_m \gamma_k \gamma_l q_m^{*}(k, l) \\ S_{\tau} &= \sum_k \sum_m \gamma_k s_m(k) & S_{\tau}^{*} &= \sum_{k,l} \sum_m \gamma_k \gamma_l s_m^{*}(k, l) \end{aligned} \quad (2)$$

mit den Konzentrationsverhältnissen

$$\gamma_e = 1 \quad \gamma_{-\nu} = \frac{n_{-\nu}}{n_e} \quad \gamma_{+\nu} = \frac{n_{+\nu}}{n_e} \quad \gamma_{a\nu} = \frac{n_{a\nu}}{n_e} \quad (3)$$

¹⁾ W. Schottky, Physik. Z. 25, 342, 635 (1924).

²⁾ Insbes. W. L. Granowski: Der elektrische Strom in Gasen; H. S. W. Massey u. E. H. S. Burhop: Electronic and Ionic Impact Phenomena.

bedeutet. Hierbei stellen die $q_m, s_m; q_m^*, s_m^*$ die Koeffizienten der „ein- bzw. zweistufigen“ Bilanzprozesse dar, und die Summation ist im doppelten Sinne durchzuführen: Einmal über die erforderliche Anzahl von Produktbildungen (k bzw. l), andererseits über die einem solchen Produkt selbst noch zuzuordnenden Einzelprozesse (m). Bei Voraussetzung proportionaler Konzentrationsverteilung über den Querschnitt, d. h. konstanter γ_τ , läßt sich das Problem der erwünschten Verallgemeinerung mathematisch relativ einfach lösen, indem es auf eine Differentialgleichung führt, die mit Hilfe bekannter Funktionen gelöst werden kann. Eine allgemeine Überlegung hierzu³⁾ zeigt, daß dies dann und nur dann im Rahmen analytischer Lösungen der Fall ist, wenn die als Integrationskonstante eingehenden Mischungsverhältnisse in der Entladungsmitte einem Kriterium der Form

$$\frac{Q_{-\mu} - S_{-\mu}}{\gamma_{-\mu} b_{-\mu}} - \frac{Q_e - S_e}{b_e} = - \frac{Q_{+\nu} - S_{+\nu}}{\gamma_{+\nu} b_{+\nu}} + \frac{Q_e - S_e}{b_e} = - \frac{Q_{a\tau} - S_{a\tau}}{\gamma_{a\tau} D_{a\tau}} \quad (4)$$

$$\frac{Q_{-\mu}^* - S_{-\mu}^*}{\gamma_{-\mu} b_{-\mu}} - \frac{Q_e^* - S_e^*}{b_e} = - \frac{Q_{+\nu}^* - S_{+\nu}^*}{\gamma_{+\nu} b_{+\nu}} + \frac{Q_e^* - S_e^*}{b_e} = - \frac{Q_{a\tau}^* - S_{a\tau}^*}{\gamma_{a\tau} D_{a\tau}} \quad (4^*)$$

mit

$$U_{-\mu} = \frac{D_e}{b_e} - \frac{D_{-\mu}}{b_{-\mu}} \quad U_{+\nu} = \frac{D_e}{b_e} + \frac{D_{+\nu}}{b_{+\nu}}$$

genügen (D_τ Diffusionskoeffizienten, b_τ Beweglichkeiten), bei deren Auflösung die γ_τ als Funktionen der Koeffizienten von Trägerbewegung- und Bilanz durch

$$\gamma_\tau = f_\tau [D_\tau, b_\tau, q(k), s(k)] \quad (4'a)$$

$$\gamma_\tau = f_\tau^* [D_\tau, b_\tau, q^*(k, l), s^*(k, l)] \quad (4'b)$$

festgelegt werden. Bei Abweichung der Mischungsverhältnisse in der Rohrachse von (4) und (4*) erhält man dagegen keine proportionale Verteilung über den Querschnitt. Außerdem besteht noch die Möglichkeit nichtanalytischer Lösungen, die sogar unter Umständen (4) und (4*) genügen, ohne jedoch konstante Konzentrationsverhältnisse in sich zu schließen, ein Fall, wie er gerade bei der Beschreibung des bereits erwähnten einfachen elektronegativen Entladungstyps auftritt. Nachfolgende Bemerkungen behandeln die Verhältnisse beim Vorhandensein von zwei Arten positiver Ionen, wobei wir der Einfachheit halber ebene Symmetrie zugrunde legen.

1. Zwei Arten von positiven Ionen bei zusätzlicher Ionisation durch Metastabile

Versteht man unter n_τ die Konzentrationen und zwar je nach Wahl von τ der Elektronen (e), der beiden Ionenarten (1,2), sowie der Angeregten (m), unter $q n_e, q_1 n_e$ bzw. $q_2 n_e$ die Anzahl von Elektronen bzw. Ionen, die durch direkten Elektronenstoß pro Zeit- und Raumeinheit erzeugt werden, $q_e n_e$ die Bildung von Angeregten bzw. $q_m n_m$ diejenige von Elektronen bzw. Ionen der

³⁾ Z. Physik 154, 361 (1959).

zweiten Art auf Grund von Ionisation durch Metastabile der ersten, so kann von dem bereits einmal integrierten Bilanzsystem

$$\begin{aligned} -D_e \ddot{N}_e + b_e \dot{N}_e \dot{V} &= q N_e + q_m N_m \\ -D_1 \ddot{N}_1 - b_1 \dot{N}_1 \dot{V} &= q_1 N_e \\ -D_2 \ddot{N}_2 - b_2 \dot{N}_2 \dot{V} &= q_2 N_e + q_m N_m \\ -D_m \ddot{N}_m &= q_a N_e - q_m N_m \end{aligned} \quad (5a-d)$$

ausgegangen werden. Hierin bedeutet V das Potential und

$$N_v = \int_0^x n_v dx \quad (6)$$

die Integrale über die Konzentrationen, wozu noch die Quasineutralitätsbeziehung

$$N_e = N_1 + N_2 \quad (7)$$

tritt, während die Ambipolarität $j_e = j_1 + j_2$ mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\dot{n}_v(0) = 0$, $\dot{V}(0) = 0$ bereits auf Grund passender Wahl der Integrationskonstanten im integrierten Ausgangssystem enthalten ist.

Unter Annahme annähernd gleicher Ionentemperaturen $\frac{D_1}{b_1} = \frac{D_2}{b_2} = \frac{D}{b}$ führt die Elimination der Feldstärke auf ein Gleichungssystem der Form:

$$\left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}\right) \ddot{N}_e + \left[\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2 + q_a}{b_2} + \frac{q + q_a}{b_e}\right] N_e + \left(\frac{D_m}{b_e} + \frac{D_m}{b_2}\right) \ddot{N}_m = 0 \quad (8a)$$

$$\ddot{N}_1 + \frac{b_1(D_e - D_2) \ddot{N}_e + (b_1 - b_2) q_1 N_e}{D_1(b_e + b_2) \dot{N}_e} \dot{N}_1 + \frac{q_1}{D_1} N_e = 0, \quad (8b)$$

was unter Heranziehung von (5d) und (7) die Berechnung des Verlaufs aller Konzentrationsarten über den Querschnitt gestattet. Kombination von (8a) und (5d) ergibt zunächst eine lineare Dgl. 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für N_e :

$$N_e^{(4)} + a_2 \ddot{N}_e + a_0 N_e = 0 \quad (9)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{D_m \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}\right)} \left[D_m \left(\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e}\right) - q_m \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}\right) \right] \\ a_0 &= - \frac{(b_e + b_2) q_m}{b_e b_2 D_m \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}\right)} \left[q_a + \frac{b_2 b_e \left(\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e}\right)}{b_e + b_2} \right]. \end{aligned} \quad (9')$$

Hieraus errechnet sich der Konzentrationsverlauf der Elektronen zu⁴⁾

$$n_e = 2 s_2 C_2 \mathfrak{E} \mathfrak{O} [s_2 x + s_3 C_4 \cos s_3 x, \quad (\text{A})$$

wo

$$s_2 = - \sqrt{-\frac{a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2 - a_0}} \quad i s_3 = \sqrt{-\frac{a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2 - a_0}} \quad (10)$$

Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms und C_2, C_4 die Integrationskonstanten:

$$C_2 = \frac{s_2^2 n_{e0} + \dot{n}_{e0}}{2 s_2 (s_2^2 + s^2)} \quad C_4 = \frac{s_2^2 n_{e0} - \dot{n}_{e0}}{s_3 (s_2^2 + s_3^2)} \quad (11)$$

bedeuten. (A) mit (5d) liefert für die Konzentration der Metastabilen:

$$n_m = 2 s_2 K_2 \mathfrak{E} \mathfrak{O} [s_2 x + s_3 K_4 \cos s_3 x, \quad (\text{B})$$

wo K_2, K_4 die Integrationskonstanten

$$K_2 = -\frac{b_2 b_e C_2}{q_m (b_e + b_2)} \left[\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e} + s_2^2 \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b} \right) \right] \\ K_4 = -\frac{b_2 b_e C_4}{q_m (b_e + b_2)} \left[\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e} - s_3^2 \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b} \right) \right]. \quad (12)$$

Schließlich erhält man noch n_1 aus (8b) zu:

$$n_1 = \left(\frac{n_{e0}}{n_e} \right)^{\frac{b_1 (D_e - D_2)}{D_1 (b_e + b_1)}} e^{\Phi(x)} \left[n_{10} - \frac{q_1}{D_1} \int_0^x N_e \left(\frac{n_e}{n_{e0}} \right)^{\frac{b_1 (D_e - D_1)}{D_1 (b_e + b_1)}} e^{-\Phi(x)} dx \right] \quad (\text{C})$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{(b_2 - b_1) q_1}{D_1 (b_e + b_2)} \int_0^x \frac{N_e}{N_e} dx. \quad (13)$$

(A), (B) und (C) stellen zusammen mit (7) das Lösungssystem für die Konzentrationsverteilung dar. Als spezielle Lösung ist darin diejenige proportionaler Verteilung über den Querschnitt enthalten, nämlich dann, wenn das Kriterium (4), welches sich für den hier behandelten Spezialfall auf die Form:

$$\frac{q_2 + \gamma_a q_m}{\gamma_2 b_2} = \frac{q_1}{\gamma_1 b_1} \quad (14a)$$

$$\frac{\frac{q_a - \gamma_a q_m}{\gamma_a}}{\frac{q + \gamma_a q_m}{b_e} + \frac{q_1}{\gamma_1 b_1}} = \frac{D_m}{\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}} \quad (14b)$$

⁴⁾ E. Kamke, Dgl. reeller Funktionen, S. 253.

reduziert, erfüllt wird, d. h. wenn die Konzentrationsverhältnisse γ_a und γ_1

$$\gamma_a = - \frac{D_m \left(\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e} \right) + q_m \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b} \right)}{2 D_m q_m \left(\frac{1}{b_e} + \frac{1}{b_2} \right)} + \sqrt{\frac{\left[D_m \left(\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{b_2} + \frac{q}{b_e} \right) + q_m \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b} \right) \right]^2}{2 D_m q_m \left(\frac{1}{b_e} + \frac{1}{b_2} \right)}} + q_a \frac{\frac{D_e}{b_e} + \frac{D}{b}}{D_m q_m \left(\frac{1}{b_e} + \frac{1}{b_2} \right)} \quad (15a)$$

sowie

$$\gamma_1 = \frac{b_2 q_1}{b_1 q_2 + b_2 q_1 + b_1 \gamma_a q_m} \quad (15b)$$

genügen. Nach Gl. (15a) wächst γ_a nur bei hinreichend starker Vergrößerung von q_a mit T_e und bei Verkleinerung von D_m , q_m , wie auch qualitativ zu erwarten ist, da sowohl die Neubildung q_a als auch q_1, q_2 mit der Elektronentemperatur zunimmt und die stationär vorhandene Anzahl Metastabiler mit wachsendem D_m bzw. q_m absinken muß. Andererseits wirkt eine Zunahme von q_2/q_1 sowie von b_1/b_2 und $\gamma_a q_m$ zugunsten einer Erhöhung der 2. Konzentrationsart, weshalb γ_1 auch nach (15b) bei absinkenden q_2/q_1 , b_1/b_2 , $\gamma_a q_m$ anwächst. Die hierdurch gekennzeichnete Lösung proportionaler Konzentrationsverteilung über den Querschnitt erhält man gerade dadurch, daß im Lösungssystem die Integrationskonstanten $C_2 = K_2 = 0$ gesetzt werden. Dann lassen sich nämlich n_e und n_m mit Hilfe der cosinus-Funktion darstellen, und die Ausintegration von (C) ergibt

$$n_1 = \frac{q_1}{D_1} n_{e0} \frac{D_1 (b_e + b_2)}{(D_e b_1 + D_1 b_e) s_e^2 - (b_1 - b_2) q_1} \cos s_3 x \quad (C')$$

$$+ \left[n_{10} - \frac{q_1}{D_1} n_{e0} \frac{D_1 (b_e + b_2)}{(D_e b_1 + D_1 b_e) s_e^2 - (b_1 - b_2) q_1} \right] [\cos s_3 x] \frac{(b_1 - b_2) q_1 - b_1 (D_e - D_2) s_e^2}{D_1 (b_e + b_2) s_e^2}$$

eine Beziehung, die sich ebenfalls mit Hilfe von (15b) auf eine solche reduziert. Die allgemeine Lösung jedoch, die durch nichtverschwindende C_e bzw. K_e gekennzeichnet ist⁵⁾, zeigt Abweichungen von der proportionalen Verteilung über den Querschnitt. Bei der nachfolgenden Durchrechnung handelt es sich um eine Beimischung von Argon zu Neon, also den sogenannten Penning-Effekt⁶⁾. Eine vollständige Übersicht zu erhalten würde nach (9'), (10) und (12) die Berechnung in Abhängigkeit der Größen D_e/b_e , D_m/q_m , q_a/b_2 , b_2/q_m und $q_1/b_1 + q_2/b_2$ als Parameter erfordern, wenn man die üblichen Vernachlässigungen $b_{1,2} \ll b_e$, $D_{1,2}/b_{1,2} \ll D_e/b_e$ vornimmt. Um einen ersten Einblick in die Verhältnisse zu bekommen, wurde sich hier jedoch darauf beschränkt, einen möglichen Fall durchzurechnen, was ausdrücklich betont sein soll. Die Ausgangsgrößen sind dabei in recht großzügiger Weise an in der Literatur gegebene Daten angeschlossen. Sie enthalten nicht nur große Un-

⁵⁾ Die spezielle Lösung $C_e = K_e = 0$ ist physikalisch unbrauchbar, da sie nach außen anwachsende Elektronenkonzentrationen liefert.

⁶⁾ A. A. Kruthof u. F. M. Penning, *Physica* 4, 430 (1937); A. A. Kruthof u. M. J. Druyvesteyn, *Physica* 4, 450 (1937).

sicherheiten, sondern entstammen darüber hinaus auch noch verschiedenartigen Versuchsbedingungen. Immerhin erfüllt dieses Beispiel aber insofern seinen Zweck, als es die Richtung der Effekte erkennen läßt, die zu erwarten sind, wenn — bei genauer Kenntnis der Ausgangsgrößen — eine spätere exakte Durchrechnung möglich ist. Tab. 1 zeigt die verwendeten Werte⁷⁾:

Tabelle 1

$q_m = 8,40 \cdot 10^2$	$D_m = 1,00 \cdot 10^2$	$b_1 = 1,84 \cdot 10^3$
$q_a = 2,67 \cdot 10^2$	$D_1 = 4,75 \cdot 10^1$	$b_2 = 6,81 \cdot 10^2$
$q_1 = 2,79 \cdot 10^1$	$D_2 = 1,76 \cdot 10^1$	$b_e = 6,63 \cdot 10^5$
$q_2 = 4,48 \cdot 10^0$	$D_e = 7,96 \cdot 10^5$	

In Abb. 1 sind die möglichen Abweichungen ε von γ_a^* aufgetragen, wo γ_a^* den idealen γ_a -Wert bei proportionaler Konzentrationsverteilung bedeutet. Die Beschränkungen ergeben sich aus den Forderungen

$$n_e \geq 0 \quad n_m \geq 0 \quad \dot{n}_e \leq 0 \quad \dot{n}_m \leq 0. \quad (16a-d)$$

Damit hat man bei der von uns getroffenen Wahl der Bilanz- und Bewegungskoeffizienten:

$$\frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \leq \frac{\cos s_3 x}{\mathfrak{E}0 \{ s_2 x - \cos s_3 x \}} \quad (16'a)$$

$$\frac{-\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \leq \frac{K_4/C_4 \cdot \cos s_3 x}{K_4/C_4 \cdot \cos s_3 x - K_2/C_2 \cdot \mathfrak{E}0 \{ s_2 x \}} \quad (16'b)$$

$$\frac{-\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \leq \frac{s_2 \sin s_3 x}{s_2 \mathfrak{E} \sin s_2 x + s_3 \sin s_3 x} \quad (16'c)$$

$$\frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \leq - \frac{K_4/C_4 \cdot s_3 \sin s_3 x}{K_2/C_2 \cdot s_2 \mathfrak{E} \sin s_2 x + K_4/C_4 \cdot s_3 \sin s_3 x} \quad (16'd)$$

⁷⁾ Die Durchrechnung bezieht sich auf 2 Torr Ne bei einer Zumischung von 0,115% Ar. Es wurde $T_+ = T_{\text{Gas}} = 300^\circ \text{K}$, sowie eine Elektronentemperatur von $T_e = 6 \cdot 1,601/5 \cdot 1,38 \cdot 10^4^\circ \text{K}$ angesetzt. D_m wurde aus den Messungen von M. A. Biondi, Physic. Rev. 88, 661 (1952) entnommen und q_m aus den dort angegebenen Wirkungsquerschnitten errechnet. Zur Festlegung von q_a und q_1 für Ne wurde die Näherungsdarstellung der Anregungs- bzw. Ionisierungswahrscheinlichkeit nach M. J. Druyvesteyn, Physica 3, 65 (1936) benutzt, wo auf Messungen der gesamten inelastischen Stoßwahrscheinlichkeit von H. Maier-Leibnitz, Z. Physik 95, 499 (1935) und der Ionisierungswahrscheinlichkeit nach P. T. Smith, Physic. Rev. 36, 1293 (1930), sowie auf die Darstellung der mittleren freien Elektronenweglänge nach R. Kollath, Physik. Z. 31, 985 (1930) zurückgegriffen wird. q_1 errechnet sich dann durch Integration über die Maxwell-Verteilung (vgl. Dosse-Mierdel: Der elektrische Strom im Hochvakuum und Gasen, S. 60). In analoger Weise wird q_2 für Ar mit $\alpha = 0,7$ als Konstante der differentialen Ionisierung bestimmt, wobei auch den Argonatomen gegenüber mit derselben mittleren freien Elektronenweglänge gerechnet wird, bezogen auf den vorherrschenden Partialdruck. Schließlich wurden die Beweglichkeiten der Ionen aus den Messungen von J. A. Hornbeck, Physic. Rev. 84, 615 (1951), entnommen. Dabei wird mit den dort gegebenen Werten für reine Gase bei 2 Torr gerechnet, ohne also die durch die Mischung erfolgenden Änderungen berücksichtigt werden. Mit der so getroffenen Wahl ergibt sich für den Biondischen Radius $r_B = 2,24$ ein Randwert der Elektronendichte bei proportionaler Konzentrationsverteilung von $n_{eR} = 0,28 n_{e0}$.

Nach (16') sind die maximalen Abweichungen dem Betrage nach monoton fallende Funktionen mit wachsendem x . Die Kurve ε_m gibt diese Änderung

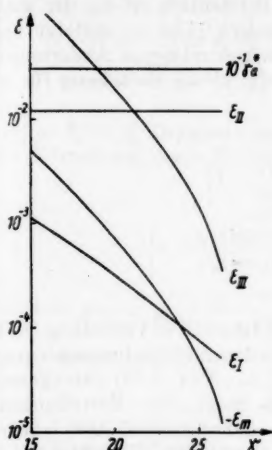


Abb. 1. Zulässige Abweichungen ε der Integrationskonstante $\gamma_a(0) = n_{a0}/n_{a0}$ vom Mischungsverhältnis bei proportionaler Verteilung

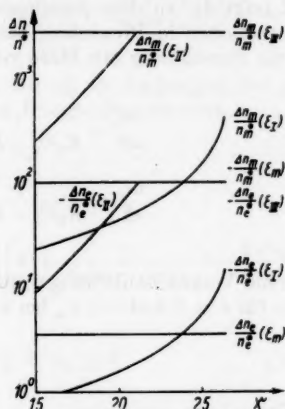


Abb. 2. Relative Dichteänderung bei verschiedener Wahl des Mischungsverhältnisses in der Entladungsmitte

für negative ε wieder, die übrigen Kurven sind positiven zuzuordnen. Dabei ist ε_I die maximale Abweichung, die gerade $\dot{n}_m(x_R) = 0$ liefert, während

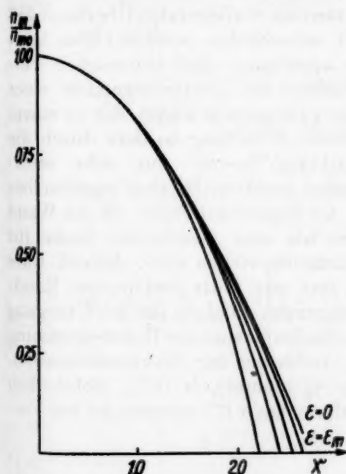


Abb. 3. Relative Dichteverteilung der Metastabilen für negative ε

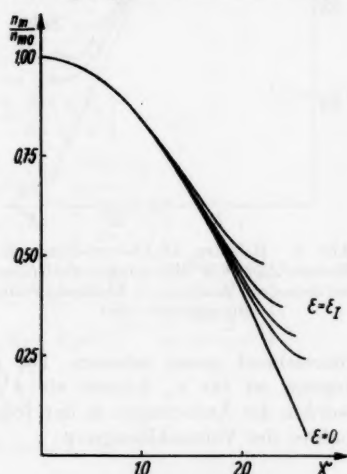


Abb. 4. Relative Dichteverteilung der Metastabilen für $\dot{n}_{mk} = 0$

ε_{II} diejenige Änderung darstellt, ab der für alle x : $\dot{n}_m(x) \geq 0$ wird. Dazwischen liegt ein Bereich, in dem die Konzentrationen der Metastabilen in Richtung Wand ein Minimum durchlaufen. Schließlich ist ε_{III} die maximal mögliche Abweichung, ohne daß die Beziehungen (16a–c) verletzt werden. Abb. 2 zeigt die zu dem jeweiligen ε zugehörigen relativen Änderungen der Konzentrationen in Prozenten, bezogen auf die ideale Verteilung für $\varepsilon = 0$, wobei die Berechnung mit Hilfe von

$$\frac{\Delta n_s}{n_s^*} = \frac{\varepsilon}{K_2/C_2 - K_4/C_4} \left[\frac{\zeta_0 \zeta_2 x}{\cos \zeta_3 x} - 1 \right] \quad (17)$$

$$\frac{\Delta n_m}{n_m^*} = \frac{\varepsilon}{K_2/C_2 - K_4/C_4} \left[\frac{K_2 C_4 \zeta_0 \zeta_3 x}{C_2 K_4 \cos \zeta_3 x} - 1 \right]$$

erfolgt. Zur Veranschaulichung wurde in Abb. 3 die relative Verteilung der Metastabilen für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_m$ bei vier verschiedenen Entladungsradien ($x_R = 2,20; 2,41; 2,54; 2,64$) durchgerechnet,

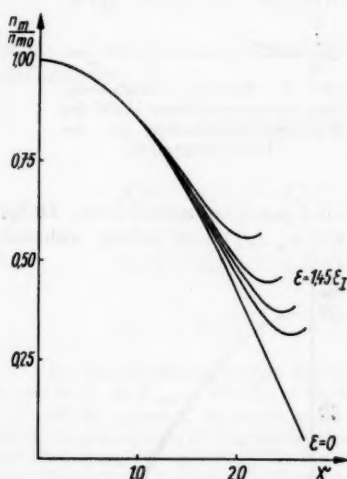


Abb. 5. Relative Dichteverteilung der Metastabilen für Mischungsverhältnisse, bei denen ein Minimum in Richtung Wand durchlaufen wird

hinreichend genau erfassen. Die relative Änderung der Elektronenkonzentration ist für ε_m kleiner als 4 1/2%, für ε_I kleiner als 10%. Schließlich werden die Änderungen in der Ionenverteilung nach (C) untersucht bei Vernachlässigung

$$|(b_1 - b_2) q_1 N_e(x)| \ll |b_1 (D_e - D_2) \ddot{N}_e(x)|,$$

die im allgemeinen in recht guter Näherung erfüllt sein wird. Dann berechnet⁸⁾ sich die Ionenverteilung zu:

$$n_1 = \left[1 + \frac{\delta_1 - \gamma_1^* (F-1) \cos s_3 \vartheta}{\gamma_1^* F \cos s_3 x} \right]^{\alpha+1} \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right) \right] \gamma_1^* n_{s0} \cos s_3 x, \quad (C'')$$

wo $\gamma_1(0) = \delta_1 + \gamma_1^*$ Integrationskonstante mit γ_1^* als derjenigen bei proportionaler Verteilung, ϑ ein Zwischenwert im Integrationsintervall,

$$\alpha = \frac{b_1 (D_e - D_2)}{D_1 (b_e + b_2)}$$

und

$$F = \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right) \right] \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{\cos s_2 x}{\cos s_3 x} \right) \right]^\alpha$$

bedeutet. Die Forderungen

$$n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dot{n}_1 \leq 0, \dot{n}_2 \leq 0 \quad (18a-d)$$

lassen für δ_1 einen Wertebereich von

$$\delta_1 = \gamma_1^* \left[(F-1) \cos s_3 \vartheta + (\kappa M - 1) F \cos s_3 x \right] \quad (19)$$

zu mit

$$K/M \leq \kappa \leq 1$$

und

$$K = \text{Max} [K_1, K_2] \quad M = \text{Min} [M_1, M_2] \quad (20)$$

sowie

$$K_1 = 0$$

$$M_1 = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{\cos s_2 x}{\cos s_3 x} \right)}{\gamma_1^* \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right) \right]} \quad (21a-d)$$

$$M_2 = \frac{D_e b_1 + D_1 b_e}{b_1 (D_e - D_2)} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{\cos s_2 x}{\cos s_3 x} \right)}{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 + \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right)}$$

$$K_2 = \frac{D_e b_1 + D_1 b_e}{b_1 (D_e - D_2)} \left[1 - \frac{D_1 s_2^2}{q_1} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 + \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right)}{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right)} \right] \cdot \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{\cos s_2 x}{\cos s_3 x} \right)}{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 + \frac{s_2 \sin s_2 x}{s_3 \sin s_3 x} \right)},$$

⁸⁾ Unter Verwendung des 2. Mittelwertsatzes der Integralrechnung, vgl. v. Mangoldt-Knopp: Einführung in die höhere Mathematik.

wobei die Beziehungen der Reihe nach den Forderungen (18) entsprechen. Dabei lassen sich die relativen Trägerdichteverteilungen in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\Delta n_1}{n_1^*} &= \varkappa M \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right) \right] - 1 \\ \frac{\Delta n_2}{n_2^*} &= \frac{1}{\gamma_2^*} \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{\cos s_2 x}{\cos s_3 x} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*} \left\{ 1 - \varkappa M \left[1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (22a-b)$$

darstellen. Ihre Werte hängen im wesentlichen von der Größe der eingehenden Koeffizienten von Trägerbewegung und Trägerbilanz ab. Solange

$$\frac{D_1 s_2^2}{q_1} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 + \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right)}{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right)} \geq 1,$$

ist $K = 0$ und damit

$$\frac{\Delta n_1}{n_1} (\delta_{\text{Min}}) = -1,$$

d. h. es sind für n_1 beliebige Randkonzentrationen zwischen n_{1R}^{Max} und 0 möglich. Entsprechendes ist für n_2 bei

$$\gamma_1^* \frac{D_e b_1 + D_1 b_e}{b_1 (D_e - D_2)} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 - \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right)}{1 + \frac{\varepsilon}{K_4/C_4 - K_2/C_2} \left(1 + \frac{s_2}{s_3} \frac{\sin s_2 x}{\sin s_3 x} \right)} \geq 1$$

der Fall, weil dann $M = M_1$ zu setzen und $\frac{\Delta n_2}{n_2^*} (\delta_{\text{Max}}) = -1$ ist. Für die vorliegende Wahl der Koeffizienten zeigt es sich, daß keine der beiden eben genannten Bedingungen erfüllt ist. Die Durchrechnung ergibt innerhalb $\varepsilon_m \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ für die vier genannten Radien bei Einschränkung von δ_1 entsprechend den durch (19) gekennzeichneten Grenzen eine Abnahme der Randkonzentration um höchstens 60% und eine Zunahme von maximal 5%. Es existieren aber darüber hinaus Lösungsformen, die sich durch einen zum mindestens im Randbereich positiven Dichtegradienten auszeichnen. Ist das für die zweite Ionenart der Fall, so hat man (20) durch

$$K = K_1, M = \text{Min} [M_1, M_2, K_3] \quad (20')$$

zu ersetzen, wobei n_{1R} bei passender Wahl von δ_1 jeden beliebigen Wert zwischen 0 und n_{1R}^{Max} annehmen kann. Liegt eine solche Verteilung jedoch für die erste Ionenart vor, so ist

$$K = \text{Max} [K_1, K_2, M_2], M = M_1 \quad (20'')$$

und $0 \leq n_{2R} \leq n_{2R}^{\text{Max}}$ bei entsprechend gewählter Integrationskonstante.

Diese Überlegungen zeigen, daß über die einfache Lösung proportionaler Trägerdichteverteilung über den Querschnitt hinausgehend Lösungsformen

möglich sind, die hiervon stark abweichen und die insbesondere mit hiervon gänzlich verschiedenen Randkonzentrationen verknüpft sein können. Letzteres dürfte hinsichtlich von Effusionsproblemen der Säule⁹⁾ von Interesse sein, für deren einfache Auswertung die Proportionalität der Konzentrationen über den Querschnitt angenommen werden muß. Leider besteht wenig Hoffnung, an dieser Stelle mit Hilfe von Betrachtungen über den axialen Fluß in der Säule weiter zu kommen, da die Abweichungen vom Kriterium (15a, b) unter Umständen minimal sind. D. h. die mögliche Änderung hängt so empfindlich von der Wahl der Integrationskonstanten ab, daß sie die Behandlung als Anfangswertproblem unpraktisch erscheinen läßt und die Beschreibung durch eine Randwertaufgabe nahelegt, was erneut auf die Wichtigkeit einer verfeinerten Randbedingung hinweist.

2. Zwei Arten von Ionen bei zusätzlicher Ionisation durch Metastabile und der Möglichkeit von Umladungsprozessen

Versteht man unter $u_{21}n_2$ bzw. $u_{12}n_1$ die Anzahl von Ionen der Art 1 bzw. 2, die pro Raum- und Zeiteinheit durch Umladung erzeugt werden, so ist jetzt von dem Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} -D_e \ddot{N}_e + b_e \dot{N}_e \dot{V} &= q N_e + q_m N_m \\ -D_1 \ddot{N}_1 - b_1 \dot{N}_1 \dot{V} &= q_1 N_e + u_{21} N_2 - u_{12} N_1 \\ -D_2 \ddot{N}_2 - b_2 \dot{N}_2 \dot{V} &= q_2 N_e + u_{12} N_1 - u_{21} N_2 + q_m N_m \\ -D_m \ddot{N}_m &= q_m N_e - q_m N_m \end{aligned} \right\} (5'a-d)$$

auszugehen. Elimination von \dot{V} , N_2 und N_m führt auf die beiden Differentialgleichungen

$$N_1 = k \ddot{N}_e + l N_e + m \ddot{N}_1 + n \ddot{N}_m \quad (23a)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2} & l &= \frac{q_1 + u_{21}}{b_1} + \frac{q_2 + q_m - u_{21}}{b_2} + \frac{q + q_m}{b_e} \\ m &= \frac{D_1}{b_1} - \frac{D_2}{b_2} & n &= \frac{D_m}{b_e} + \frac{D_m}{b_2} \end{aligned} \right\} (23'a)$$

wo $u = u_{12} + u_{21}$ und

$$\begin{aligned} & (q_1 + u_{21}) N_e \dot{N}_e - u \dot{N}_e N_1 - (q_1 + u_{21}) \frac{b_2 - b_1}{b_e + b_2} N_e \dot{N}_1 \\ & + u \frac{b_2 - b_1}{b_e + b_2} N_1 \dot{N}_1 + \frac{b_1 (D_e - D_2)}{b_e + b_2} \ddot{N}_e \dot{N}_1 + \frac{D_2 b_1 - D_1 b_2}{b_e + b_2} \ddot{N}_1 \dot{N}_1 + D_1 \dot{N}_e \ddot{N}_1 = 0. \end{aligned} \quad (23b)$$

⁹⁾ M. Pahl, Z. Naturforschg. 12a, 632 (1957).

Hierbei werden also auch voneinander abweichende Ionentemperaturen zugelassen. Kombination von (23a, b) ergibt mit den Vernachlässigungen¹⁰⁾:

$$\text{Max} \left\{ \left| \frac{D_1}{b_1} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \right) \right|; \left| \frac{D_1}{b_1} - \frac{D_2}{b_2} \right| \right\} |\dot{n}_1| \ll \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2} \right) |\dot{n}_e| \quad (24a)$$

$$\left| \frac{D_1}{b_1} - \frac{D_2}{b_2} \right| |\ddot{n}_1| \ll \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2} \right) |\ddot{n}_e|$$

$$\left(\frac{D_m}{b_e} + \frac{D_m}{b_2} \right) |\dot{n}_m| \ll \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2} \right) |\dot{n}_e| \quad (24b)$$

$$\left(\frac{D_m}{b_e} + \frac{D_m}{b_2} \right) |\ddot{n}_m| \ll \left(\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2} \right) |\ddot{n}_e|$$

$$\left| \frac{D_1(b_e + b_2)}{b_1} - \frac{D_1 b_2 - D_2 b_1}{b_1} l \right| |\dot{n}_1| \ll \frac{b_e + b_2}{b_e} \left| \frac{D_e b_2 + D_2 b_e}{b_2 - b_1} - D_e l \right| |\dot{n}_e| \quad (24c)$$

die Dgl.

$$N_e \ddot{N}_e + a^* \ddot{N}_e \ddot{N}_e + b^* \dot{N}_e \ddot{N}_e + c^* N_e \dot{N}_e = 0. \quad (25)$$

Hierbei ist:

$$a^* = \frac{D_e}{(q + q_a)} \quad b^* = - \frac{D_e b_2 + D_2 b_e - D_e (b_2 - b_1) l}{(b_2 - b_1) (q + q_a) k} \quad (26)$$

$$c^* = \frac{(b_2 - b_1) l - (b_e + b_2)}{(b_2 - b_1) k}.$$

Erste Integration von (25) führt auf¹¹⁾

$$N_e \ddot{N}_e + a \dot{N}_e^2 + b \dot{N}_e^2 + c N_e^2 = d \quad (27)$$

mit

$$a = \frac{a^*}{2} \quad b = \frac{b^* - 1}{2} \quad c = \frac{c^*}{2} \quad d = b n_{e0}^2.$$

Die Dgl. (27) kann mit Hilfe einer Reihe von Transformationen:

$$\dot{N}_e [x(N_e)] = p(N_e) \quad (28a)$$

$$v^2 = d - b p^2 - c N_e^2 \quad (28b)$$

$$z^2 = N_e^2 + 4 a v^2 \quad (28c)$$

$$N_e = \varepsilon \xi \quad z(N_e) = w(\xi), \quad (28d)$$

¹⁰⁾ Die Vernachlässigung (24a, b) trägt der dominierenden Rolle der Elektronendiffusion bei Ausbildung des ambipolaren Diffusionsvorganges Rechnung. Darüber hinaus werden in (24c) die einzelnen Summanden wegen (24a, b) paarweise gegeneinander klein und somit (24c) Gültigkeit außer einer Reihe von diskreten Werten besitzen, für die die Differenz auf der rechten Seite selbst so klein wird, daß sie in die Größenordnung der Summanden bzw. Differenz auf der linken Seite fällt.

¹¹⁾ Die Dgl. (27) ist analog gebaut zu der bei der bereits erwähnten Behandlung eines einfachen elektronegativen Entladungstyps gefundenen, unterscheidet sich jedoch hiervon grundsätzlich durch die andere Struktur der Koeffizienten. Insbesondere ist jetzt:

$$4 a c - 2 b - 1 = - \frac{b_e (D_e - D_2)}{(b_2 - b_1) (q + q_a) k} < 0,$$

weshalb auch auf eine gegenüber dem früheren Fall leicht abgeänderte Form der Jakobi-schen Dgl. transformiert wird.

turen
gen¹⁰⁾:

wo

$$\delta = \mp 2 b \varepsilon \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{4 a c - 2 b - 1} \quad (28e)$$

(24a)

in die spezielle Jakobische Dgl.

$$w \dot{w} + \delta w - \xi = 0 \quad (29)$$

(24b)

umgeschrieben werden. Die Lösung von (29) läßt sich entweder über die Auflösung eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten unter Verwendung eines Parameters t durch

(24c)

$$w = s_1 K_1 e^{-s_1 t} + s_2 K_2 e^{-s_2 t} \quad (30)$$

$$\xi = K_1 e^{-s_1 t} + K_2 e^{-s_2 t}$$

mit $-s_1, -s_2$, wo

(25)

$$s_1 = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 1} \quad s_2 = -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 1} \quad (30')$$

(26)

als Nullstellen des charakteristischen Polynoms darstellen oder durch die Transformation

$$w(\xi) = \xi u(\xi) \quad (28f)$$

in eine separierbare Dgl. überführen, deren Lösung sich zu

$$C_1 |w - s_1 \xi|^{-s_1} = C_2 |w - s_2 \xi|^{-s_2} \quad (31)$$

(27)

ergibt. Zieht man noch die Dgl. (5d) für die Angeregten heran, so ist das allgemeine Lösungssystem durch

$$n_e^2 = n_{e0}^2 + \frac{(1 - 4 a c) \varepsilon^2 \xi^2 - w^2}{4 a b} \quad (32a)$$

$$w = \varepsilon \int \frac{d\xi}{n_e(\xi)} \quad (32b)$$

(28a)

$$n_1 = \left[\frac{b_e (D_e - D_2)}{(b_2 - b_1) D_e} \sqrt{\frac{(b_2 - b_1) (q + q_a) k}{b_e (D_e - D_2)}} \frac{\xi}{\pm w} + \frac{D_e b_2 + D_2 b_e}{(b_2 - b_1) D_e} \right] n_e \quad (32c)$$

(28b)

(28c)

$$\gamma_1 = \pm \frac{b_e (D_e - D_2)}{(b_2 - b_1) D_e} \sqrt{\frac{(b_2 - b_1) (q + q_a) k}{b_e (D_e - D_2)}} \frac{\xi}{w} + \frac{D_e b_e + D_2 b_e}{(b_2 - b_1) D_e} \quad (32d)$$

(28d)

$$n_m = n_{m0} \mathfrak{E} \left[\sqrt{\frac{q_m}{D_m}} x - \frac{q_a}{D_m} \int_0^x N_e(\tau) \mathfrak{E} \left[\sqrt{\frac{q_m}{D_m}} (x - \tau) d\tau \right. \right. \quad (32e)$$

ronen-

varüber

mander

für die

rdnung

g eines

ervon

:

kobi-

gegeben. Für die proportionale Konzentrationsverteilung bestimmen sich die Integrationskonstanten γ_τ aus

$$\frac{\frac{q + \gamma_a q_m}{b_e} + \frac{q_2 + \gamma_1 u_{12} - \gamma_2 u_{21} + \gamma_a q_m}{\gamma_2 b_2}}{\frac{q + \gamma_a q_m}{b_e} + \frac{q_1 + \gamma_2 u_{21} - \gamma_1 u_{12}}{\gamma_1 b_1}} = \frac{\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_2}{b_2}}{\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_1}{b_1}} \quad (33a)$$

$$\frac{\frac{q_a - \gamma_a q_m}{\gamma_a}}{\frac{q + \gamma_a q_m}{b_e} + \frac{q_1 + \gamma_2 u_{21} - \gamma_1 u_{12}}{\gamma_1 b_1}} = \frac{D_m}{\frac{D_e}{b_e} + \frac{D_1}{b_1}} \quad (33b)$$

zu:

$$\gamma_1 = \frac{b_2(u + q_1 + u_{21}) + b_1(q_2 + q_a - u_{21})}{2(b_2 - b_1)u} \pm \sqrt{\left[\frac{b_2(u + q_1 + u_{21}) + b_1(q_2 + q_a - u_{21})}{2(b_2 - b_1)u} \right]^2 - b_2 \frac{q_1 + u_{21}}{(b_2 - b_1)u}} \quad (34a)$$

und

$$\gamma_a = \frac{1}{\gamma_1 b_1 q_m} [b_2(1 - \gamma_1)(q_1 + u_{21} - \gamma_1 u) - b_1 \gamma_1 (q_2 - u_{21} + \gamma_1 u)], \quad (34b)$$

wobei die üblichen Vernachlässigungen hinsichtlich der Beweglichkeiten und Diffusionskoeffizienten vorgenommen wurden. Die hierdurch gekennzeichneten Lösungen erhält man gerade dadurch, daß in (30) bzw. (31) eine der Konstanten K_v bzw. C_v verschwindet. Damit errechnet sich die Elektronenverteilung nach (32a, b) zu¹²⁾:

$$n_e = n_{e0} \cos \sqrt{\frac{\lambda_v}{b}} x \quad (32')$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{b + b^2 \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{b_e(D_e - D_2)}{(b_2 - b_1)(q + q_a)k b^2}} \right]}{2a}$$

$$a = \frac{D_e}{2(q + q_a)} \quad b = \frac{b_e [b_2 q_1 + b_1 (q_2 + q_a) - (b_1 u_{21} + b_2 u_{12})]}{2 b_1 b_2 (q + q_a)}$$

Unter Benutzung von (32') erhält man durch Auswertung von (32e) für die Angeregten:

$$n_m = \left[n_{m0} - \frac{q_a}{D_m} \frac{n_{e0}}{\frac{\lambda_v}{b} + \frac{q_m}{D_m}} \right] \mathfrak{E}_0 \sqrt{\frac{q_m}{D_m}} x + \frac{q_a}{D_m} \frac{n_{e0}}{\frac{\lambda_v}{b} + \frac{q_m}{D_m}} \cos \sqrt{\frac{\lambda_v}{b}} x, \quad (32'')$$

die sich bei Verwendung von (34b) auf

$$n_m = \gamma_a n_{e0} \cos \sqrt{\frac{\lambda_v}{b}} x \quad (32''')$$

reduziert. Die allgemeine nicht proportionale Konzentrationsverhältnisse liefernde Lösung wäre dadurch gegeben, daß keine der Konstanten K bzw. C verschwindet. Wie die Transformationen (28) zeigen, erfordert dies aber auf jeden Fall die Anfangsbedingung $w(0) = 0$ in der Entladungsmitte. Wegen (30') haben aber die s_v , ganz gleich wie das Vorzeichen von δ beschaffen ist, stets die Vorzeichen $s_1 > 0$, $s_2 < 0$. Aus der Lösung (30) bzw. (31) ist nun ohne weiteres ersichtlich, daß dies wegen der entgegengesetzten Vorzeichen der s_v nur in dem Falle erfüllt werden kann, wenn eine der Konstanten K_v bzw. C_v verschwindet. D. h. im Rahmen der von uns vorgenommenen Näherung ist eine allgemeinere Lösung als die durch proportionale Konzentrationsverteilung gegebene auf Grund der geforderten Anfangsbedingung auszuschließen.

¹²⁾ Der Gültigkeitsbereich dieser Lösung wird einmal durch das Vorzeichen und die Größe von b eingeschränkt, weil dies bei der Lösung des Integrals (32b) eine Rolle spielt, andererseits dadurch, daß nur positive γ_1 in (34a) in Frage kommen.

Zusammenfassung

(34a) Die Verallgemeinerung der Schottky-Theorie auf mehrere Arten von Ionen und angeregte Neutralteilchen erfordert ein Eingehen auf die bei der Lösung der Dgl. für die Konzentrationen auftretenden Integrationskonstanten, die die Form der Verteilung beeinflussen. Der Fall zweier Arten von positiven Ionen und einer Metastabiler bei direkter Stoßionisation und Ionisation durch (34b) Metastabile läßt sich unter der Annahme annähernd gleicher Ionentemperaturen geschlossen lösen. Die Durchrechnung eines Beispielles zeigt, daß über die einfache Lösung proportionaler Dichteverteilung hinausgehend Lösungsformen möglich sind, die hiervon stark abweichen und die insbesondere mit hierzu gänzlich verschiedenen Randkonzentrationen verknüpft sein können; letzteres ist insbesondere für Effusionsprobleme der Säule von Bedeutung. Die überraschend starke Abhängigkeit der Verteilungsform von den Mischungsverhältnissen in der Entladungsmitte läßt die Behandlung als Anfangswertproblem unpraktisch erscheinen, und legt die Beschreibung durch eine Randwertaufgabe nahe, was die Wichtigkeit der Aufstellung verfeinerter Randbedingungen unterstreicht. Läßt man auch Umladungsvorgänge zu, so kann das Problem unter gewissen Näherungen, die durch die unterschiedlichen Größenverhältnisse der Diffusionskoeffizienten und Beweglichkeiten nahegelegt werden, andererseits aber auch eine gewisse Anzahl von diskreten Werten der Bilanzkoeffizienten ausschließt, durch den Spezialfall einer Jakobischen Dgl. beschrieben werden. Im Gegensatz zu einem bereits behandelten einfachen elektronegativen Entladungstyp ergeben sich lediglich Lösungen mit proportionaler Konzentrationsverteilung im Rahmen der vorgenommenen Näherung.

(32'e) Herrn Prof. R. Seeliger danke ich herzlich für anregende Diskussionen.

Greifswald, Institut für Gasentladungsphysik der DAdW.

Bei der Redaktion eingegangen am 30. April 1959.

Zur Energie-Reichweite-Beziehung der Agfa-K 2-Kernspuremulsion

Von D. Bebel

Mit 1 Abbildung

Inhaltsübersicht

Auf der Grundlage eines von Vigneron¹⁾ vorgeschlagenen Verfahrens wird eine Energie-Reichweite-Kurve für Protonen in der Agfa-K 2-Emulsion berechnet und an Hand experimenteller Reichweitewerte, die durch Analyse von Thoriumzerfallsternen gewonnen werden, empirisch justiert. Die Justierung erfolgt durch Variation eines durch das mittlere Anregungspotential der Emulsion bestimmten Parameters. Die Rechnungen erstrecken sich auf Protonenenergien von 1 bis 70 MeV. Oberhalb 10 MeV ist die zu einer vorgegebenen Energie gehörige Reichweite um etwa 10% größer als die entsprechende Reichweite in der Ilford-C2-Emulsion.

Eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Anwendung von Kernspuremulsionen bei der Untersuchung von Problemen der Kernphysik und der kosmischen Strahlung ist die genaue Kenntnis der Energie-Reichweite-Beziehung des verwendeten Emulsionstyps. Insbesondere für die Ilford-C2- und Ilford-G5-Emulsion wurden in den letzten Jahren zahlreiche Energie-Reichweite-Kurven veröffentlicht, die zum Teil auf empirischer, zum Teil auf theoretischer Grundlage ermittelt wurden²⁾. Eine Energie-Reichweite-Kurve für die Agfa-K 2-Emulsion wurde von Lanius³⁾ an Hand eines von Cüer⁴⁾ entwickelten Verfahrens berechnet, bei dem die Reichweiten in der Emulsion über die entsprechenden Reichweiten in Luft gewonnen werden. Die in ³⁾ benutzten Daten über die Zusammensetzung der Agfa-K 2-Emulsion bezogen sich jedoch auf erste Versuchsmuster der Emulsion. Sie sind gegenwärtig nicht mehr zutreffend, so daß eine Neuberechnung der Energie-Reichweite-Beziehung erforderlich ist. Außerdem wurden in der Zwischenzeit gegenüber der Arbeit von Cüer eine Reihe methodischer Fortschritte bei der Berechnung von Reichweitekurven für Kernemulsionen erzielt⁵⁾. Den in

¹⁾ L. Vigneron, J. Physique Radium **14**, 145 (1953).

²⁾ Siehe den Bericht von Teucher⁶⁾.

³⁾ K. Lanius, Z. wiss. Photogr. **48**, 243 (1953).

⁴⁾ P. Cüer, C. R. Acad. Sci. (Paris) **223**, 1121 (1946).

⁵⁾ Hinsichtlich einer kritischen Analyse der Methode von Cüer sei auf eine Arbeit von Bogaardt und Vigneron⁷⁾ verwiesen.

⁶⁾ M. Teucher, Ergebnisse d. exakt. Naturwiss. **28**, 407 (1955).

⁷⁾ M. Bogaardt u. L. Vigneron, J. Physique Radium **11**, 652 (1950).

der vorliegenden Arbeit durchgeführten Rechnungen liegt ein halbempirisches Verfahren zugrunde, das 1953 von Vigneron¹⁾ vorgeschlagen wurde.

I. Theoretische Grundlagen

In dem von uns betrachteten Energiebereich (Protonenenergien von 1 bis 70 MeV) verlieren geladene Teilchen, deren Masse M groß ist gegenüber der Elektronenmasse m , ihre Energie fast ausschließlich durch Anregung und Ionisierung von Atomen der Bremssubstanz, so daß der mittlere Energieverlust pro cm Weglänge durch die bekannte Bethesche Formel⁸⁾⁹⁾

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} N B(v), \quad (1)$$

$$B(v) = Z \left[\ln \frac{2 m v^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2 \right] - \sum_n C_n(v) \quad (1a)$$

gegeben ist¹⁰⁾. Hierbei sind E , ze und v kinetische Energie, Ladung und Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens ($\beta = \frac{v}{c}$), während N die Anzahl der Atome der Bremssubstanz pro cm^3 , Z deren Kernladungszahl und I deren mittleres Anregungspotential bezeichnet. Das Korrekturglied $C_n(v)$ berücksichtigt die Tatsache, daß die Elektronen der n -ten Schale nicht mehr voll am Bremsprozeß teilnehmen, sobald die Geschwindigkeit des Teilchens so weit herabgesunken ist, daß sie mit der der Elektronen dieser Schale vergleichbar wird.

Der mittlere Energieverlust pro cm Weglänge in der Emulsion ergibt sich nach dem Additionstheorem der Bremskräfte¹¹⁾ durch Summation über die Anteile der verschiedenen atomaren Bestandteile:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Em}} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} \sum_i N_i \left[Z_i \left(\ln \frac{2 m v^2}{I_i(1-\beta^2)} - \beta^2 \right) - \sum_n C_n^{(i)}(v) \right]. \quad (2)$$

Für Geschwindigkeiten, die groß sind gegenüber denen der Elektronen der Bremssubstanz, werden die Schalenkorrekturen vernachlässigbar. Die Be-

⁸⁾ H. A. Bethe, Ann. Physik 5, 325 (1930).

⁹⁾ M. S. Livingston u. H. A. Bethe, Rev. Mod. Physics 9, 264 (1937).

¹⁰⁾ Die Fermi-Korrektur für dichte Bremsmedien spielt bei den betrachteten Energien noch keine Rolle. Wie für die Ilford-C2-Emulsion durchgeführte Rechnungen¹²⁾ zeigen, besteht für Protonenenergien bis zu 200 MeV Übereinstimmung zwischen den nach der Betheschen Formel und den nach der (die Fermi-Korrektur enthaltenden) Formel von Sternheimer¹³⁾ berechneten Energie-Reichweite-Kurven.

¹¹⁾ Das Additionstheorem schließt einen gewissen Fehler ein, da die mittleren Anregungspotentiale der einzelnen Atome bei der Verbindung zu einem Molekül eine Änderung erfahren. Diese Änderung wirkt sich aber auf die Bremskräfte so schwach aus, daß keine Abweichungen oberhalb 0,5% zu erwarten sind¹⁴⁾.

¹²⁾ G. Baroni, C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti u. A. Manfredini, Mitt. des „Bureau of Standards“ BS 9 (1954).

¹³⁾ R. M. Sternheimer, Physic. Rev. 88, 851 (1952).

¹⁴⁾ H. A. Bethe u. J. Ashkin in: E. Segré, Experimental Nuclear Physics, Vol. I, New York 1953.

ziehung (2) kann dann in der Gestalt

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Em}} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} N_e Z_e \left[\ln \frac{2 m v^2}{I_e (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right] \quad (3)$$

geschrieben werden mit

$$N_e = \sum_i N_i, \quad Z_e = \frac{\sum_i N_i Z_i}{N_e}, \quad \ln I_e = \frac{\sum_i N_i Z_i \ln I_i}{N_e Z_e}; \quad (3a)$$

I_e wird als mittleres Anregungspotential der Emulsion bezeichnet.

Das von Vigneron vorgeschlagene Verfahren zur Berechnung von Energie-Reichweite-Beziehungen beruht auf einer Umschreibung der Formel (2) auf eine Form, die einer empirischen Anpassung an vorhandene Meßpunkte bequem zugänglich ist. Die Schalenkorrekturen werden nach einem groben Näherungsverfahren durchgeführt, das von Aron, Hoffmann und Williams bei der Berechnung der Energie-Reichweite-Beziehungen einer ganzen Reihe schwerer Elemente angewandt worden ist¹⁵⁾. Bei diesem Näherungsverfahren wird die Bremszahl in die von den einzelnen Schalen herrührenden Anteile zerlegt, wobei sie für eine einzelne Atomsorte im Falle großer Geschwindigkeiten die Form

$$B(v) = \sum_n \frac{1}{2} (Z_n + f_n) \left[\ln \frac{2 m v^2}{I_n (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right] \quad (4)$$

annimmt (Z_n = Anzahl der Elektronen der n -ten Schale, f_n = Summe der Oszillatorenstärken für alle Übergänge von den Zuständen der n -ten Schale ins kontinuierliche Spektrum oder auf unbesetzte diskrete Niveaus, I_n = mittleres Anregungspotential der Elektronen dieser Schale, $\sum_n \frac{1}{2} (Z_n + f_n) = Z^{16)}$).

Die beim Übergang zu kleinen Geschwindigkeiten erforderlichen Korrekturen erfolgen dadurch, daß man bei der Berechnung der Bremszahl für ein vorgegebenes v alle Schalen fortläßt, deren mittleres Anregungspotential oberhalb $2 m v^2$ gelegen ist, die also negative Beiträge liefern würden. Im Falle einer zusammengesetzten Bremssubstanz ist es hierbei zweckmäßig, alle Elektronen der Substanz in Klassen einzuteilen und zwar nach dem zugehörigen Element und der Schale, auf der sie sich befinden, und diese Klassen nach fallenden mittleren Anregungspotentialen durchnummerieren. Wir benutzen im weiteren die folgenden Bezeichnungen:

A_k Anzahl der Elektronen der Klasse k pro cm^3 ,

A_k^* effektive Anzahl der Elektronen der Klasse k pro cm^3 , $A_k^* = A_k \cdot \frac{1}{2} (Z_n + f_n) / Z_n$,

\bar{I}_k mittleres Anregungspotential der Elektronen der Klasse k , $\bar{I}_k \geq \bar{I}_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, l$.

¹⁵⁾ Aron, Hoffmann u. Williams, Report AECU-663, 1949, unveröff., berichtet in ¹⁴⁾.

¹⁶⁾ Der Faktor $\frac{1}{2} (Z_n + f_n)$ wird im folgenden als effektive Elektronenzahl der n -ten Schale bezeichnet.

Ferner gehen wir von $-\frac{dE}{dx}$ zu $-\frac{dE^2}{dx}$ über und führen die Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned}\psi &= (1 + \varepsilon) (\log_{10} E - \varepsilon'), \\ \varepsilon' &= \log_{10} [(1 + \varepsilon) (1 - \beta^2)] + \frac{\beta^2}{\ln 10}, \\ \varepsilon &= \frac{2E}{Mv^2} - 1\end{aligned}$$

ein, die von Vigneron für Protonen tabuliert worden sind. Wie man leicht verifiziert, ist dann

$$-\left(\frac{dE^2}{dx}\right)_{\text{Em}} = a\psi + ab(1 + \varepsilon) = g(E^2) \quad (5)$$

mit

$$a = \begin{cases} a_{\infty} & \text{für } E \geq \frac{M}{4m} \tilde{I}_1, \\ a_{\infty} - K \sum_{k=1}^{k'} A_k^* & \text{für } \frac{M}{4m} \tilde{I}_{k'} > E \geq \frac{M}{4m} \tilde{I}_{k'+1}, \end{cases} \quad (5a)$$

$$ab = \begin{cases} a_{\infty} b_{\infty} & \text{für } E \geq \frac{M}{4m} \tilde{I}_1, \\ a_{\infty} b_{\infty} + K \sum_{k=1}^{k'} A_k^* \log_{10} \left(\frac{M}{4m} \tilde{I}_k \right) & \text{für } \frac{M}{4m} \tilde{I}_{k'} > E \geq \frac{M}{4m} \tilde{I}_{k'+1}, \end{cases} \quad (5b)$$

$$a_{\infty} = K \sum_{k=1}^l A_k^* = K N_s Z_s, \quad (5c)$$

$$b_{\infty} = -\log_{10} \left(\frac{M}{4m} I_s \right), \quad (5d)$$

wobei

$$K = 4\pi e^4 z^2 (\ln 10) \frac{M}{m}.$$

Für große Energien sind die Parameter a und ab konstant; beim Übergang zu kleineren Energien ändern sie sich bei jeder „Energieschwelle“ $\frac{M}{4m} \tilde{I}_k$ um einen bestimmten Betrag.

Die Energie-Reichweite-Beziehung ergibt sich aus (5) durch numerische Integration:

$$R(E^2) = \int_{E_0^2}^{E^2} \frac{dE^2}{g(E^2)} + R(E_0^2). \quad (6)$$

Die Integrationskonstante $R(E_0^2)$ muß empirisch bestimmt werden, da die Bethesche Formel für Geschwindigkeiten, bei denen Elektroneneinfang- und Elektronenverlustprozesse eine merkliche Rolle spielen, ihre Gültigkeit verliert.

II. Bestimmung der Parameter a und ab für Protonen in der Agfa-K2-Emulsion

Die Ergebnisse einer chemischen Analyse der Agfa-K2-Emulsion bei 60% relativer Luftfeuchtigkeit¹⁷⁾ und die sich daraus ergebenden Größen N_s sind

¹⁷⁾ VEB Filmfabrik Agfa Wolfen, private Mitteilung, 1954.

in Tab. 1 zusammengestellt. Danach beträgt die Dichte der Emulsion bei der genannten Luftfeuchtigkeit $3,38 \text{ g/cm}^3$. Dieser Wert steht in ausgezeichneter Übereinstimmung mit einer Dichtemessung, die von Kölzner¹⁸⁾ bei derselben relativen Luftfeuchtigkeit nach der Differenzenwägungsmethode ausgeführt wurde und $(3,38 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3$ ergab¹⁹⁾. Es ist somit anzunehmen, daß die Analysendaten der Tab. 1 hinreichend zuverlässig sind. Wir erhalten mit ihnen für Protonen gemäß (5c)

$$a_{\infty} = 0,1026 (\text{MeV})^2/\mu. \quad (7)$$

Die Korrekturfunktionen $a - a_{\infty}$ und $a b - a_{\infty} b_{\infty}$ für die Agfa-K2-Emulsion sind in Tab. 2 als Funktion der Protonenenergie wiedergegeben ($L =$ Loschmidtsche Zahl). Die mittleren Anregungspotentiale \tilde{I}_k der zu eliminierenden Schalen und die zur Berechnung der Größen A_k^* erforderlichen effektiven Elektronenzahlen dieser Schalen wurden aus der zitierten Arbeit von Vigneron übernommen.

Tabelle 1
Zusammensetzung der Agfa-K2-Emulsion bei 60% relativer Luftfeuchtigkeit

Element	Z_i	ρ/cm^3	$N_i [\text{cm}^{-3}]$
H	1	0,054	$3,23 \cdot 10^{22}$
C	6	0,31	1,55
N	7	0,093	0,40
O	8	0,26	0,98
S	16	0,016	0,03
Br	35	1,10	0,83
Ag	47	1,50	0,84
J	53	0,047	0,02
		3,38	$7,88 \cdot 10^{22}$

Da die benutzte Korrekturmethode auf einer Näherung beruht, wird der relative Fehler der Parameter a und $a b$ um so größer, je größer die Korrekturglieder selbst werden. Eine Fortsetzung der Rechnungen unterhalb $E_p = 1 \text{ MeV}$ erscheint nicht zweckmäßig, da die an a_{∞} anzubringende Korrektur in der Umgebung dieses

Punktes bereits 13% ausmacht und außerdem bei kleineren Energien Elektroneneinfang- und Elektronenverlustprozesse nicht mehr vernachlässigbar sind.

Die Berechnung des Parameters b_{∞} ist problematisch, da die mittleren Anregungspotentiale der schweren Emulsionsbestandteile nicht mit genügender Sicherheit bekannt sind. Vigneron hat bei den von ihm durchgeführten Rechnungen für die Ilford-C2-Emulsion die mittleren Anregungspotentiale herangezogen, die sich aus älteren Untersuchungen von Mano²⁰⁾ und aus neueren Messungen von Bakker und Segré²¹⁾ ergeben. Außerdem stehen die Ergebnisse einer von Caldwell²²⁾ vorgenommenen Neuberechnung von Anregungspotentialen für mittlere und schwere Elemente zur Verfügung. Der

¹⁸⁾ R. Kölzner, Diplomarbeit, Karl-Marx-Universität, Leipzig, 1954.

¹⁹⁾ Die Messung wurde an Kernemulsionen ausgeführt, die demselben Guß entstammten wie die bei unseren Reichweitmessungen (s. Anhang) benutzte Emulsion. Dies ist wesentlich, da Emulsionen verschiedener Gußnummer mitunter geringe Unterschiede in der Zusammensetzung aufweisen. Einem Vergleich experimenteller Reichweitwerte mit theoretischen Kurven, die für eine bestimmte Emulsionszusammensetzung gerechnet wurden, sollte stets eine Kontrolle der Dichte der bei den Messungen benutzten Emulsionen vorhergehen.

²⁰⁾ G. M. Mano, C. R. Acad. Sci. (Paris) **197**, 319 (1933); Ann. de Phys. **11**, 407 (1934).

²¹⁾ C. J. Bakker u. E. Segré, Physic. Rev. **81**, 489 (1951).

²²⁾ D. O. Caldwell, Physic. Rev. **100**, 291 (1955).

Nachteil der von Mano durchgeführten Untersuchungen besteht darin, daß die Ergebnisse in einem Energiebereich gewonnen wurden (α -Teilchen mit Energien zwischen 2,2 und 8,8 MeV), in dem für mittlere Elemente nicht nur die Korrekturen für die *K*-Schalen, sondern auch die für die *L*- und *M*-Schalen von erheblichem Einfluß sind, die Auswertung aber unter der Voraussetzung erfolgte, daß alle Elektronen am Bremsprozeß teilnehmen. Bei den Messungen von Bakker und Segré dagegen sind die Schalenkorrekturen wegen der hohen Energie der benutzten Teilchen (Protonen mit 340 MeV) bei den uns interessierenden Elementen vernachlässigbar, jedoch scheinen die sich aus diesen Messungen ergebenden Anregungspotentiale mit anderen systematischen Fehlern behaftet zu sein (s. ²³).

Tabelle 2

Änderung der Parameter *a* und *b* für die Agfa-K2-Emulsion mit abnehmender Protonenenergie

Elimin. Schale	Energie- schwelle [MeV]	Mittl. Anreg.- Pot. d. elimin. Schale [keV]	A_s^*/L [Mol/cm ²]	$a-a_\infty$ [(MeV) ² /μ]	$a b-a_\infty b_\infty$ [(MeV) ² /μ]
<i>J_K</i>	16,3	35,2	0,00061	0	0
<i>Ag_K</i>	12,7	27,5	0,02287	-0,00004	0,00005
<i>Br_K</i>	7,0	15,2	0,02264	-0,00156	0,00172
<i>J_L</i>	3,7	8,1	0,00197	-0,00306	0,00299
<i>Ag_L</i>	2,85	6,2	0,07450	-0,00319	0,00306
<i>Br_L + S_K</i>	1,45	3,15	0,07953	-0,00813	0,00531
<i>J_M</i>	1,02	2,21	—	-0,01341	0,00615

Die unter sorgfältiger Berücksichtigung der Schalenkorrekturen durchgeführten Rechnungen von Caldwell stützen sich auf Energieverlustmessungen von Sachs und Richardson²³ an Protonen mit einer Energie von 18 MeV.

Die sich hierbei ergebenden Anregungspotentiale sind wesentlich größer als die von Bakker und Segré, so z. B. für Silber um mehr als 50%. In Tab. 3 sind die Werte I_s und b_∞ , die sich für die Agfa-K2-Emulsion bei Benutzung der angeführten Anregungspotentiale ergeben, zusammengestellt.

Auf Grund der geschilderten Situation ist es notwendig, die Daten der Tab. 3 nur als erste Näherungswerte anzusehen und eine empirische „Justierung“ der berechneten Energie-Reichweite-Kurven vorzunehmen. Wir

Tabelle 3

Benutzte mittlere Anregungspotentiale	I_s [eV]	b
Bakker-Segré ^{21) 24) 25)}	249	0,942
Mano ^{20) 24)}	275	0,899
Caldwell ^{22) 26)}	336	0,812

²³ D. C. Sachs u. J. R. Richardson, Physic. Rev. **83**, 834 (1951).

²⁴ Unter Hinzuziehung der von Vigneron¹⁾ durch Interpolation gefundenen Werte.

²⁵ Benutzt man die Potentiale, die sich nach¹⁴⁾ aus den Ergebnissen von Bakker und Segré bei Berücksichtigung der Schalenkorrekturen ergeben, so erhält man für I_s einen um etwa 20% kleineren Wert.

²⁶ Bei der Interpolation wurde für die Bestandteile S, Br und J die Beziehung $I/Z = 13,6$ zugrunde gelegt (Mittelwert der von Caldwell bei mittleren und schweren Elementen erhaltenen I/Z -Werte). Für die leichten Bestandteile (H, C, N, O), die in das Ergebnis nur unwesentlich eingehen, wurden die Potentiale von Mano beibehalten.

führen diese Justierung durch, indem wir b_∞ in (5) so lange variieren, bis wir nach Ausführung der numerischen Integration in (6) eine Kurve erhalten, die innerhalb der Meßfehler durch alle experimentellen Punkte hindurchgeht. In unserem Falle sind wir hierbei gegenwärtig auf die folgenden vier Reichweitewerte für Protonen relativ geringer Energie angewiesen, über deren Gewinnung im Anhang berichtet wird:

$$R_p(2,21 \text{ MeV}) = (48,7 \pm 0,1) \mu,$$

$$R_p(1,70 \text{ MeV}) = (32,1 \pm 0,1) \mu,$$

$$R_p(1,58 \text{ MeV}) = (28,6 \pm 0,1) \mu,$$

$$R_p(1,43 \text{ MeV}) = (24,3 \pm 0,1) \mu.$$

Setzen wir als Integrationskonstante in (6) den experimentellen Wert für $E_p = 2,21 \text{ MeV}$ und für a_∞ den Wert (7) ein, so ergibt sich eine Kurve, die sehr gut mit den verfügbaren Meßpunkten übereinstimmt, falls wir $b_\infty = 0,85$ wählen. Aus

$$b_\infty (\text{empirisch}) = 0,85 \quad (8)$$

folgt für das mittlere Anregungspotential der Agfa-K2-Emulsion gemäß (5d):

$$I_e (\text{empirisch}) = 308 \text{ eV}. \quad (9)$$

Eine hinreichend gute Anpassung innerhalb der Fehlergrenzen läßt sich erreichen, wenn für b_∞ Werte aus dem Bereich

$$0,84 \lesssim b_\infty \lesssim 0,86 \quad (10)$$

benutzt werden. Dies entspricht Werten I_e mit

$$301 \text{ eV} \lesssim I_e \lesssim 315 \text{ eV}.$$

III. Numerische Ergebnisse und Approximation durch Potenzgesetze

Die mit $a_\infty = 0,1026 (\text{MeV})^2/\mu$ und $b_\infty = 0,85$ berechneten Reichweitewerte für Protonen sind in Tab. 4 für den Energiebereich von 1 bis 70 MeV wiedergegeben. Eine Variation der Größe b_∞ innerhalb der Grenzen der Ungleichung (10) bewirkt unterhalb $E_p = 10 \text{ MeV}$ eine Änderung der Reichweiten der Tab. 4 um weniger als 1% und oberhalb $E_p = 10 \text{ MeV}$ eine Änderung um weniger als 0,5%.

Da zwischen der Energie-Reichweite-Beziehung für Protonen und der entsprechenden Beziehung für ein Teilchen der Masse M und Ladung z der bekannte Zusammenhang

$$R_{M,z} \left(\frac{M}{M_p} E \right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{M}{M_p} R_p(E) + c(M, z) \quad (12)$$

besteht mit $c(M, z) = 0$ für $z = 1$, können aus den Protonendaten der Tab. 4 leicht Energie-Reichweite-Kurven für leichte und schwere Mesonen sowie Deuteronen und Tritonen berechnet werden. Die Konstante $c(M, z)$, die die unterschiedliche Beeinflussung der Reichweiten zweier Teilchen verschiedener Ladung durch Elektroneneinfang- und Elektronenverlustprozesse berück-

Tabelle 4
Numerische Werte zur Energie-Reichweite-Beziehung für Protonen in der Agfa-K2-Emulsion bei 60% relativer Luftfeuchtigkeit

E_p^2 [(MeV) ²]	E_p [MeV]	R_p [μ]	E_p^2 [(MeV) ²]	E_p [MeV]	R_p [μ]
1	1	14,2	100	10	603,8
1,2	1,095	16,3	120	10,95	706,7
1,4	1,183	18,3	140	11,83	807,5
1,6	1,265	20,3	160	12,65	906,5
1,8	1,342	22,2	180	13,42	1004
2	1,414	24,1	200	14,14	1100
2,5	1,581	28,7	250	15,81	1337
3	1,732	33,1	300	17,32	1567
3,5	1,871	37,4	350	18,71	1794
4	2	41,6	400	20	2016
5	2,236	49,7	450	21,21	2236
6	2,450	57,5	500	22,36	2452
7	2,646	65,1	600	24,49	2878
8	2,828	72,6	700	26,46	3296
9	3	79,9	800	28,28	3708
10	3,162	87,0	900	30	4113
12	3,464	101,1	1000	31,62	4515
14	3,742	114,8	1100	33,17	4911
16	4	128,2	1200	34,64	5303
18	4,243	141,3	1300	36,06	5692
20	4,472	154,2	1400	37,42	6076
25	5	185,8	1500	38,73	6458
30	5,477	216,6	1600	40	6837
35	5,916	246,6	1800	42,43	7586
40	6,325	276,0	2000	44,72	8326
45	6,708	305,0	2500	50	10141
50	7,071	333,6	3000	54,77	11912
60	7,746	389,7	3500	59,16	13649
70	8,367	444,5	4000	63,24	15355
80	8,944	498,4	4500	67,08	17035
90	9,487	551,5	5000	70,71	18692

sichtigt, muß empirisch bestimmt werden. Für α -Teilchen beträgt $c(M, z)$ in der Agfa-K2-Emulsion etwa $1,4 \mu$ (s. Anhang)

Innerhalb begrenzter Energieintervalle ist es möglich, die berechnete Energie-Reichweite-Beziehung in der Gestalt

$$E_p = k R_p^n \quad (13)$$

darzustellen. In Tab. 5 sind für drei Energiebereiche entsprechende Werte k und n zusammengestellt (E_p in MeV, R_p in μ). Die in der letzten Spalte angeführte Größe $\delta R/R$ gibt die in dem entsprechenden Bereich auftretende maximale relative Abweichung der nach (13) berechneten Reichweiten von den Werten der Tab. 4 an.

Tabelle 5

E_p -Bereich	R_p -Bereich	k	n	$\delta R/R$ [%]
$1 \text{ MeV} \lesssim E_p \lesssim 4 \text{ MeV}$	$15 \mu \lesssim R_p \lesssim 130 \mu$	0,191	0,628	2
$3,7 \text{ MeV} \gtrsim E_p \gtrsim 13 \text{ MeV}$	$110 \mu \gtrsim R_p \gtrsim 950 \mu$	0,230	0,589	0,8
$12 \text{ MeV} \gtrsim E_p \gtrsim 70 \text{ MeV}$	$830 \mu \gtrsim R_p \gtrsim 18500 \mu$	0,263	0,569	0,5

IV. Diskussion

Die für die Agfa-K2-Emulsion berechnete Reichweitekurve verläuft bei $E_p = 10$ MeV etwa 9,5% und bei $E_p = 50$ MeV etwa 10,5% oberhalb der von Vigneron für die Ilford-C2-Emulsion berechneten Kurve. Zum Vergleich sei erwähnt, daß eine mit den Potentialen von Bakker und Segré unter sonst gleichen Voraussetzungen berechnete Kurve bei $E_p = 10$ MeV nur um etwa 3,5%, bei $E_p = 50$ MeV um etwa 6% oberhalb der von Vigneron veröffentlichten Kurve verlaufen würde, was mit dem zu erwartenden Verhältnis der Bremskräfte der beiden Emulsionstypen (s. u.) unvereinbar ist.

Es erhebt sich die Frage, ob der empirisch gefundene Wert $b_\infty = 0,85$ als hinreichend gesichert angesehen werden kann, obwohl nur experimentelle Punkte in einem Energiebereich zur Verfügung standen, in dem die Schalenkorrekturen noch eine beträchtliche Rolle spielen und somit nicht ausgeschlossen werden kann, daß bei der Anpassung zu einem Teil auch Ungenauigkeiten in den Schalenkorrekturen korrigiert werden. Eine gewisse Klärung kann hier ein Vergleich der Ergebnisse unserer Rechnungen mit der von Vigneron für die Ilford-C2-Emulsion ermittelten Reichweitekurve bringen, zu deren Justierung Meßpunkte zwischen 1 und 39,5 MeV zur Verfügung standen, also auch Punkte bei Energien, bei denen die Schalenkorrekturen vernachlässigbar sind.

Wir betrachten zunächst die Faktoren, mit denen man bei den beiden Emulsionstypen die mittels der Daten von Mano sowie Bakker und Segré berechneten mittleren Anregungspotentiale multiplizieren muß, um Übereinstimmung mit den Meßpunkten zu erzielen. In unserem Fall erhalten wir eine solche Übereinstimmung, wenn wir das mittels der Potentiale von Mano berechnete mittlere Anregungspotential der Agfa-K2-Emulsion (s. Tab. 3) um den Faktor $1,12 \pm 0,03$ und das mittels der Potentiale von Bakker und Segré berechnete Potential um den Faktor $1,24 \pm 0,03$ erhöhen. Bei den von Vigneron für die Ilford-C2-Emulsion durchgeführten Rechnungen betragen die entsprechenden Faktoren $1,11 \pm 0,07$ und $1,23 \pm 0,07$. Diese Übereinstimmung ist bemerkenswert und kann als Stütze für die Zuverlässigkeit des von uns erhaltenen Justierungswertes $b_\infty = 0,85$ angesehen werden.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit bietet das Verhältnis $Q(v)$ der Bremskräfte der beiden Emulsionstypen bei hohen Energien. Aus (3) folgt²⁷⁾:

$$Q(v) = \frac{-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Em}}^*}{-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Em}}} = \frac{N_e^* Z_e^* \left[\ln \frac{2 m v^2}{I_e^* (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right]}{N_e Z_e \left[\ln \frac{2 m v^2}{I_e (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right]}. \quad (14)$$

In Tab. 6 sind einige numerische Werte dieses Quotienten wiedergegeben²⁸⁾. Es zeigt sich, daß $Q(v)$ bei den betrachteten Energien von der Wahl der Anregungspotentiale nahezu unabhängig ist.

²⁷⁾ Wir kennzeichnen im weiteren alle Größen, die sich auf die Ilford-C2-Emulsion beziehen, durch einen Stern.

²⁸⁾ Die Zusammensetzung der Ilford-C2-Emulsion wurde der zitierten Arbeit von Vigneron entnommen.

Nach Tab. 6 sollte die Bremskraft der Ilford-C2-Emulsion somit um etwa 13% größer sein als die der Agfa-K2-Emulsion. Für hinreichend kleine Energieintervalle $\Delta E = E_2 - E_1$ kann das Verhältnis (14) nach der Formel

$$\frac{-\left(\frac{\Delta E}{\Delta R}\right)^*}{-\left(\frac{\Delta E}{\Delta R}\right)} = \frac{R(E_2) - R(E_1)}{R^*(E_2) - R^*(E_1)} \quad (15)$$

berechnet werden. Setzen wir hier für $R(E_2) - R(E_1)$ und $R^*(E_2) - R^*(E_1)$ die Reichweitedifferenzen ein, die sich jeweils aus den durch empirische Anpassung erhaltenen Reichweitestrukturen der beiden Emulsionstypen ergeben, so erhalten wir für den Quotienten (15) Werte zwischen 1,10 und 1,11, also um 2 bis 3% kleinere Werte als nach Tab. 6 zu erwarten wären. Diese Differenz kann durch die Tatsache bedingt sein, daß die empirische Anpassung in unserem Fall mit Hilfe von Meßpunkten bei niedrigen Energien durchgeführt wurde. Es gibt jedoch eine andere, näherliegende Erklärung. Vigneron konnte bei der empirischen Anpassung seiner Reichweitestruktur durch Justierung des Parameters b_{∞} allein keine befriedigende Übereinstimmung mit allen experimentellen Punkten erreichen, sondern war gezwungen, den an Hand der Angaben über die Zusammensetzung der Ilford-C2-Emulsion berechneten Wert des Parameters a_{∞} um $\approx 3\%$ zu reduzieren. Er sieht die Ursache hierfür in Ungenauigkeiten der von ihm benutzten Analysendaten, bei denen nicht bekannt ist, auf welche relative Luftfeuchtigkeit sie sich beziehen. Trifft diese Deutung zu, so heißt das gemäß (5c), daß die mit den von Vigneron benutzten Analysendaten berechnete Größe $N_e^* Z_e^*$ um $\approx 3\%$ zu groß ist. Folglich müßten auch die Werte der Tab. 6 um $\approx 3\%$ reduziert werden, was zu einer sehr guten Übereinstimmung zwischen den von uns erhaltenen Werten des Quotienten (15) und dem nach (14) zu erwartendem Verhältnis der Bremskräfte führen würde.

Tabelle 6

E_p [MeV]	$Q(v)$ mit Pot. von Bakker u. Segré	$Q(v)$ mit Pot. von Mano	$Q(v)$ mit empirisch bestimmtem Pot.
50	1,134	1,133	1,135
40	1,134	1,132	1,134
30	1,133	1,131	1,133
20	1,132	1,130	1,132

Insgesamt kann somit die Konsistenz zwischen den Energie-Reichweite-Beziehungen für die Agfa-K2- und die Ilford-C2-Emulsion als gut angesehen werden. Es ist zu erwarten, daß die von uns berechnete Reichweitestruktur in dem gesamten Energiebereich der Tab. 4 innerhalb etwa 2% mit der Erfahrung übereinstimmt. Eine experimentelle Prüfung der Ergebnisse bei Protonenenergien oberhalb 10 MeV wäre wünschenswert. Hinsichtlich der mittleren Anregungspotentiale stehen unsere Resultate im Einklang mit der von Caldwell und Vigneron gezogene Schlußfolgerung, daß die von Bakker und Segré veröffentlichten Werte für die mittleren und schweren Elemente mit systematischen Fehlern behaftet sein müssen.

Abschließend möchte ich der Leitung des Kernphysikalischen Instituts der Deutschen Akademie der Wissenschaften für die Ermöglichung und Unterstützung der vorliegenden Untersuchungen meinen Dank aussprechen. Herrn

Dr. K. Lanius danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche wertvolle Hinweise. Ebenso gilt mein Dank dem Laborantenkollektiv der Abteilung „Physik höchstenergetischer Prozesse“ des Kernphysikalischen Instituts für die Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen.

Anhang

Meßpunkte aus dem Thoriumzerfall

Die zur empirischen Justierung herangezogenen Reichweitewerte wurden durch Umrechnung aus den Ergebnissen von Reichweitemessungen an Thoriumzerfallssternen gewonnen. Die Untersuchungen erfolgten in einer 150 μ dicken Agfa-K2-Emulsion (Format 3 \cdot 6 cm), die mit einer 0,0092 m-Thoriumnitratlösung imprägniert und nach schnellem Trocknen drei Tage bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 60% aufbewahrt worden war¹⁸⁾. Insgesamt wurden über 400 Zerfallssterne vermessen. In die Reichweitestatistik wurden lediglich Spuren aufgenommen, deren Vertikalprojektion in der entwickelten Emulsion weniger als 6 μ betrug. Während der Messungen herrschte eine durchschnittliche relative Luftfeuchtigkeit von 60%. Die Ergebnisse sind in Tab. 7 zusammengestellt. Dabei ist s_R die mittlere quadratische Abweichung der gemessenen Reichweiten vom Mittelwert \bar{R} und $s_R = \frac{s_R}{\sqrt{n}}$ der sich daraus ergebende statistische Fehler des Mittelwertes.

Tabelle 7

E_α [MeV]	n	\bar{R} [μ]	$\frac{s_R}{R}$ [%]	s_R [μ]	$\frac{\sigma_R}{R}$ [%]
8,78	409	49,7 ₀	1,8	0,04	2,7
6,77	326	33,3 ₂	3,2	0,06	3,5
6,28	340	29,8 ₆	3,5	0,06	3,7
5,68	276	25,5 ₆	4,1	0,06	4,3

Für die Streuung der gemessenen Reichweiten um ihren Mittelwert sind die natürliche Reichweitestreuung (straggling), die Meßfehler und einige charakteristische Emulsionseffekte verantwortlich zu machen, von denen der sog. Heterogenitätseffekt bei kurzen Spuren der wichtigste ist. Es ist durch die Tatsache bedingt, daß die Emulsion ein heterogenes Gemisch von Silberbromid und Gelatine ist. Legt das Teilchen einen überdurchschnittlichen Teil seines Weges in der Gelatine zurück, so nimmt seine Reichweite zu und umgekehrt, was zu einer zusätzlichen Reichweitestreuung führen muß. Die Ergebnisse einer unter Berücksichtigung der natürlichen Reichweitestreuung, der Meßfehler und des Heterogenitätseffektes durchgeführten Berechnung der zu erwartenden relativen mittleren quadratischen Abweichungen σ_R/\bar{R} sind in der letzten Spalte der Tab. 7 angegeben²⁰⁾. Die Berücksichtigung des Heterogenitätseffektes, der den Hauptbeitrag liefert, erfolgte hierbei nach einer von Barkas, Smith und Birnbaum³¹⁾ angegebenen Näherungs-

²⁰⁾ D. Bebel, Diplomarbeit, Humboldt-Universität, Berlin, 1957.

³¹⁾ W. H. Barkas, F. M. Smith u. W. Birnbaum, Physic. Rev. **98**, 605 (1955).

formel, die eine Reihe vereinfachender Annahmen erhält. In den Fällen $E_\alpha = 6,77$ MeV, $6,28$ MeV und $5,68$ MeV besteht befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Werten s_R/\bar{R} . Im Falle $E_\alpha = 8,78$ MeV scheint der Heterogenitätseffekt überschätzt zu sein.

Da zwischen den Energie-Reichweite-Beziehungen von Protonen und α -Teilchen gemäß (12) die Beziehung

$$R_\alpha(3,9715 E) = 0,9928 R_p(E) + c_\alpha \quad (16)$$

besteht, können aus den vier aus dem Thoriumzerfall gewonnenen Meßpunkten vier Punkte der Energie-Reichweite-Kurve für Protonen abgeleitet werden. Hinsichtlich der Konstanten c_α sind wir auf die entsprechenden Informationen angewiesen, die für die Ilford-C2-Emulsion vorliegen. Auf Grund des Verhältnisses der Bremskräfte der beiden Emulsionstypen ist hierbei zu erwarten, daß der Wert von c_α für die Agfa-K2-Emulsion nur um etwa 10% größer ist, als für die Ilford-C2-Emulsion. Leider sind die für die Ilford-C2-Emulsion veröffentlichten Angaben nicht eindeutig. So schätzt z. B. Vigneron¹⁾ c_α auf etwa $0,4 \mu$, während Barkas³¹⁾ $0,9 \mu$ und Wilkins³²⁾ $1,38 \mu$ erhält. Lonchamp³³⁾ findet für α -Teilchenenergien zwischen $1,5$ und 6 MeV im Mittel $1,1 \mu$ und für α -Teilchenenergien zwischen 7 und 10 MeV im Mittel $1,7 \mu$. Wir haben einen Vergleich der von Vigneron¹⁾ berechneten Energie-Reichweite-Kurve für Protonen mit experimentellen Reichweitepunkten für α -Teilchen in der Ilford-C2-Emulsion vorgenommen. Die genannte Reichweitekurve geht durch alle Protonenmeßpunkte, die für die Ilford-C2-Emulsion zur Ver-

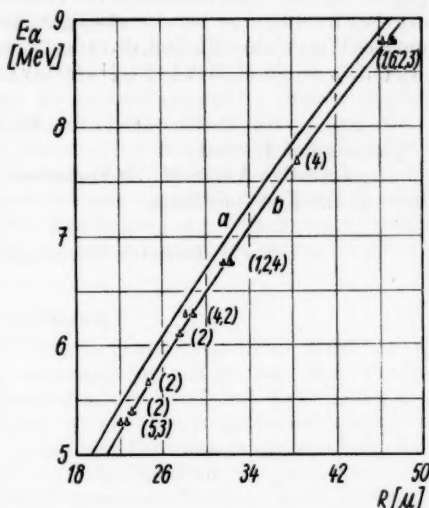


Abb. 1. Zur Bestimmung der Konstanten c_α für die Ilford-C2-Emulsion. Die Kurve b geht aus der Kurve a durch Addition von $1,3 \mu$ hervor. (1) Meßpunkt von Lonchamp und Braun³⁴⁾; (2) Meßpunkt von Green und Liversey³⁵⁾; (3) Meßpunkt von Lattes, Fowler u. Cüer³⁶⁾; (4) Meßpunkt von Cüer³⁷⁾; (5) Meßpunkt von Faraggi³⁸⁾; (6) Meßpunkt von Vigneron³⁹⁾

³¹⁾ W. H. Barkas, Physic. Rev. **89**, 1019 (1953).

³²⁾ J. J. Wilkins, Harwell-Report G/R 664 (1951), unveröff., berichtet in ³¹⁾.

³³⁾ J. P. Lonchamp, J. Physique Radium **14**, 89 (1953).

³⁴⁾ J. P. Lonchamp u. H. Braun, berichtet in ³³⁾.

³⁵⁾ L. L. Green u. D. L. Liversey, unveröff., berichtet von N. Feather in Nucleonics, 1949, Nr. 7.

³⁶⁾ C. M. G. Lattes, P. H. Fowler u. P. Cüer, Proc. Phys. Soc. **59**, 883 (1947).

³⁷⁾ P. Cüer, Thèse, Paris 1947, berichtet in ³⁶⁾.

³⁸⁾ H. Faraggi, J. Physique Radium **7**, 353 (1946).

³⁹⁾ L. Vigneron, J. Physique Radium **10**, 305 (1949).

fügung stehen, innerhalb deren Fehlergrenzen hindurch. Diese Kurve wurde nach (16) unter Vernachlässigung der Konstanten c_α auf α -Teilchenenergien umgerechnet (Kurve *a* in der Abb.). Zum Vergleich wurden 15 Reichweitpunkte für α -Teilchen bei 8 verschiedenen Energien zwischen $E_\alpha = 5$ MeV und $E_\alpha = 9$ MeV herangezogen. Die mittlere Differenz zwischen diesen Meßpunkten und den entsprechenden Reichweitewerten der Kurve *a* beträgt $(1,3 \pm 0,1) \mu$, was gut mit dem Ergebnis von Wilkins übereinstimmt. Der von Vigneron angegebene Wert ist wahrscheinlich zu klein. Wir haben bei unseren Rechnungen für die Agfa-K2-Emulsion den für die Ilford-C2-Emulsion erhaltenen Wert um 10% vergrößert, also durchweg $c_\alpha = 1,4 \mu$ gesetzt. Dann ergeben sich gemäß (16) und Tab. 7 die im Abschnitt II angegebenen vier Reichweitewerte für Protonen. Bei der empirischen Justierung der Reichweitkurve ist ein etwaiger systematischer Fehler des für c_α benutzten Wertes ohne Einfluß, da es dort nur auf die Differenzen $R_p(2,21 \text{ MeV}) - R_p(1,70)$, $R_p(2,21 \text{ MeV}) - R_p(1,58 \text{ MeV})$ usw. ankommt.

Zeuthen bei Berlin, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Kernphysikalisches Institut.

Gegenwärtige Anschrift des Verfassers: Dubna bei Moskau, Vereinigtes Institut für Kernforschung.

Bei der Redaktion eingegangen am 4. Mai 1959.

Berec

Auf
streuung
„consta
geladen
messun
durchg
elektro
stische
sich ein
der Me

In
Massen
nen vo
sowie
einem
in der
fahren
der Er
sagitta
der Re
Für d
1954 u
gearbe

1)
2)
3)
4)
5)
6)
mata v
Hinrich
den „
streuung
7)
8)
9)

Berechnung und Eichung eines „constant-sagitta“-Schemas für die Agfa-K2-Kernspuremulsion

Von D. Bebel

Mit 6 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Auf der Grundlage der Molièreschen Theorie der Coulombvielfachstreuung und einer in ¹⁾ berechneten Energie-Reichweite-Kurve wird ein „constant-sagitta“-Zellenschema zur Massenbestimmung an Spuren einfach geladener Teilchen in der Agfa-K2-Emulsion berechnet. Es werden Eichmessungen an Protonenspuren mit Reichweiten zwischen 5000 und 12000 μ durchgeführt. Die bezüglich der unelastischen Streuung durch die Atom-
elektronen korrigierten Erwartungswerte liegen innerhalb des einfachen statistischen Fehlers der experimentellen Ergebnisse. Als Nebenresultat ergibt sich ein Hinweis auf eine Möglichkeit zur Erhöhung des Auflösungsvermögens der Methode.

I. Einführung

In den letzten Jahren wurde eine relativ große Anzahl von Methoden zur Massenbestimmung an Kernspuren entwickelt, die auf gewissen Kombinationen von Reichweitmessungen, Messungen der Coulomb-Vielfachstreuung sowie einer Reihe von Größen beruhen, die mit dem Ionisierungsvermögen in einem theoretisch oder empirisch bekannten Zusammenhang stehen²⁾. Das in der vorliegenden Arbeit für die Agfa-K2-Emulsion ausgearbeitete Verfahren dient zur Identifizierung einfach geladener Teilchen, deren Spuren in der Emulsion enden. Es beruht auf einer unter der Bezeichnung „constant-sagitta“-Methode bekanntgewordenen speziellen Kombination von Messungen der Restreichweite und des mittleren Winkels der Coulomb-Vielfachstreuung. Für die Ilford-G5-Emulsion wurde diese Methode in den Jahren 1953 und 1954 unabhängig von drei Arbeitsgruppen in Bombay, Brüssel und Oslo ausgearbeitet³⁻⁶⁾.

¹⁾ D. Bebel, Ann. Physik (7) **5**, 144 (1960).

²⁾ Näheres siehe den zusammenfassenden Bericht von Teucher⁷⁾.

³⁾ S. Biswas, E. G. George u. B. Peters, Proc. Ind. Acad. Sci. **38**, 418 (1953).

⁴⁾ C. Dilworth, S. J. Goldsack u. L. Hirschberg, Nuovo Cim. **11**, 113 (1954).

⁵⁾ T. Holtebekk, N. Isachsen u. S. Ö. Sörensen, Philos. Mag. **44**, 1037 (1953).

⁶⁾ Im Anschluß daran wurden für die Ilford-G5-Emulsion „constant-sagitta“-Schemata von Fay, Gottstein und Hain⁸⁾ sowie von Orkin-Lecourtois⁹⁾ veröffentlicht. Hinsichtlich einer Diskussion der Vorteile der „constant-sagitta“-Methode gegenüber den „klassischen“ Verfahren zur Massenbestimmung mittels Reichweite- und Vielfachstreuungsmessungen sei auf die Arbeit der Bombay-Gruppe³⁾ verwiesen.

⁷⁾ M. Teucher, Ergebnisse d. exakt. Naturwiss. **28**, 407 (1955).

⁸⁾ H. Fay, K. Gottstein, K. Hain, Suppl. Nuovo Cim. **11**, 234 (1954).

⁹⁾ A. Orkin-Lecourtois, Suppl. Nuovo Cim. **1**, 222 (1955).

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, bei der Messung der Vielfachstreuung nach der Fowlerschen Koordinatenmethode¹⁰⁾ die Zellenlänge t längs der Teilchenbahn derart zu variieren, daß der Erwartungswert $\langle |D| \rangle$ der Beträge der zweiten Differenzen der y -Koordinaten der Spur in jeder Zelle der gleiche ist. $\langle |D| \rangle$ ist mit dem Erwartungswert $\langle |\alpha| \rangle$ der Beträge der (auf eine Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung) projizierten Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Bahnsehnern in der Näherung kleiner Winkel ($\text{tg } \alpha = \alpha$) durch die Beziehung $\langle |\alpha| \rangle t = \langle |D| \rangle$ verknüpft, so daß zwischen $\langle |D| \rangle$, der Zellenlänge t sowie dem Impuls p , der Geschwindigkeit v und der Ladung ze des gestreuten Teilchens der aus der Theorie der Vielfachstreuung folgende Zusammenhang

$$\langle |D| \rangle = \frac{K z t^{1/2}}{p v} \quad (1)$$

besteht. K bezeichnet hierbei den Streufaktor (für die Koordinatenmethode), der im wesentlichen durch die Zusammensetzung des Mediums bestimmt ist, aber auch schwach von v , t und z abhängt. Bei Beschränkung auf einfach geladene Teilchen ist das Zellenlängensystem, das die Bedingung $\langle |D(R)| \rangle = \text{const}$ erfüllt, somit eindeutig bestimmt, falls wir die Teilchenmasse $M = M_0$ und den Erwartungswert $\langle |D| \rangle = \langle |D_0| \rangle$ ¹¹⁾ vorgeben (M_0 -Schema). Wendet man jetzt das M_0 -Schema auf die Spur eines Teilchens der Masse $M_x \neq M_0$ an, so erweist sich der entsprechende Erwartungswert $\langle |D_x| \rangle$ nicht mehr als streng reichweiteunabhängig (s. Abschn. IV), jedoch kann man diese schwache Reichweiteabhängigkeit in erster Näherung vernachlässigen. Man erhält dann für M_x die allgemein benutzte Formel

$$M_x = M_0 \left(\frac{\langle |D_0| \rangle}{\langle |D_x| \rangle} \right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad (2)$$

in der n den Exponenten bei der Approximation der Energie-Reichweite-Beziehung durch ein Potenzgesetz der Form $E = a M^{1-n} R^n$ bezeichnet.

Die von den einzelnen Autorengruppen ausgearbeiteten Varianten der „constant-sagitta“-Methode unterscheiden sich in der Art und Weise, in der bei der Berechnung der Zellschemata die Geschwindigkeits- und Zellenlängenabhängigkeit des Streufaktors, die Abweichungen der Energie-Reichweite-Beziehung von einem Potenzgesetz und die Abweichungen von der nichtrelativistischen Näherung $p v = 2 E$ berücksichtigt werden. Zum Teil werden diese Korrekturen in das Zellenlängensystem hineingearbeitet, zum Teil werden sie vernachlässigt oder nachträglich durch Multiplikation der Meßergebnisse mit Korrekturfaktoren in Rechnung gesetzt. Bei dem in der vorliegenden Arbeit für die Agfa-K2-Emulsion berechneten Zellenlängensystem, bei dem als Teilchenmasse M_0 die Protonenmasse zugrunde gelegt

¹⁰⁾ P. H. Fowler, *Philos. Mag.* **41**, 169 (1950).

¹¹⁾ Der Erwartungswert $\langle |D_0| \rangle$ ist so vorzugeben, daß einerseits sein Verhältnis zu dem durch Meßfehler und Unzulänglichkeiten der Emulsion bedingten Störpegel (im weiteren als unechte Streuung bezeichnet) einen hinreichend großen Wert besitzt, andererseits eine möglichst große Anzahl von Zellen zur Verfügung steht, damit der statistische Fehler des bei der Messung an einer einzelnen Spur erhaltenen Mittelwertes möglichst klein wird.

wird, werden die genannten Korrekturen von vornherein in das Schema einbezogen. Die Approximation der Energie-Reichweite-Beziehung durch ein Potenzgesetz wird vermieden, während die Berücksichtigung der Geschwindigkeits- und Zellenlängenabhängigkeit des Streufaktors auf der Grundlage der Molièreschen Theorie¹²⁾ erfolgt (s. Abschn. II). Darüber hinaus werden Kurven angegeben, mit deren Hilfe die Vernachlässigungen bei der Ableitung der Beziehung (2) in zweiter Näherung korrigiert werden können.

II. Numerische Werte des Streufaktors für die Agfa-K2-Emulsion

Die Gestalt des Streufaktors ergibt sich aus der Molièreschen Theorie zu¹³⁾

$$K(v, t, z) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2 e^2 \left(\sum_i N_i Z_i^2 \right)^{1/2} L(B), \quad (3)$$

$$L(B) = \sqrt{B} (1 + 0,982 B^{-1} - 0,117 B^{-2} + \dots).$$

Hierbei bezeichnet N_i die Anzahl der Atome pro cm^3 und Z_i die Kernladungszahl des i -ten atomaren Bestandteils der Emulsion, während der Entwicklungsparameter B als die größere Lösung der transzendenten Gleichung

$$B - \ln B = \ln \Omega_b + 1 - 2 C \quad (4)$$

definiert ist ($C = 0,577 \dots$ = Eulersche Konstante). Die Größe Ω_b , die ein Maß für die mittlere Anzahl der Einzelstreuereprozesse beim Durchfliegen der Schichtdicke t darstellt, ist durch die Beziehung

$$\Omega_b = \frac{\sum_i \chi_{a,i}^2}{\bar{\chi}_a^2} \quad (5)$$

gegeben. Hierbei ist

$$\chi_{a,i}^2 = 4 \pi N_i t \left(\frac{Z_i z e^2}{p v} \right)^2 \quad (6)$$

und $\bar{\chi}_a$ ein effektiver Mittelwert des Abschirmungswinkels, der nach der Formel

$$\ln \bar{\chi}_a^2 = \frac{\sum_i N_i Z_i^2 \ln \chi_{a,i}^2}{\sum_i N_i Z_i^2} \quad (7)$$

zu bilden ist mit

$$\chi_{a,i}^2 = \frac{Z_i^{1/3} \hbar^2}{0,885^2 a_0^2 p^2} (1,13 + 3,76 \gamma_i^2)$$

¹²⁾ G. Molière, Z. Naturforschg. **2a**, 133 (1947); **3a**, 78 (1948).

¹³⁾ Der Faktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$, der den Unterschied zwischen den nach der Koordinatenmethode gemessenen Streuwinkeln und den Winkeln zwischen aufeinanderfolgenden Bahntangenten berücksichtigt, müßte – streng genommen – durch $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{t} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{\varepsilon}{t} \right)^3 \right]^{1/2}$ ersetzt werden¹⁴⁾, wobei ε die Länge des Spurinervalls bezeichnet, über das bei der Ableitung der y -Koordinaten der Spur visuell gemittelt wird (Anpassungslänge). In den meisten Fällen ist es jedoch möglich, $\varepsilon/t < 0,2$ zu wählen, so daß die von ε abhängigen Glieder vernachlässigt werden können. Anderenfalls muß am Ergebnis der Messung eine zusätzliche Glättungskorrektur angebracht werden.

¹⁴⁾ G. Molière, Z. Naturforschg. **10a**, 177 (1955).

und

$$\gamma_i = \frac{Z_i z e^2}{\hbar v};$$

a_0 bezeichnet den Bohrschen Radius. Macht man von einem Abschneideverfahren Gebrauch, bei dem alle Elemente oberhalb des vierfachen Mittelwertes aus der Statistik eliminiert werden, so ist der neue Erwartungswert, den wir mit $\langle D \rangle_{eo}$ bezeichnen, mit p, v, z und t durch eine zu (1) analoge Beziehung verknüpft. Lediglich der Streufaktor K ist durch einen entsprechenden Faktor K_{eo} zu ersetzen, für den die Molièresche Theorie den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} K_{eo}(v, t, z) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{\pi} e^2 \left(\sum_i N_i Z_i^2 \right)^{1/2} L_{eo}(B), \\ L_{eo}(B) &= \sqrt{B} \int_0^{4\langle \varphi \rangle} \varphi \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} + B^{-1} f^{(1)}(\varphi) + B^{-2} f^{(2)}(\varphi) + \dots \right\} d\varphi, \\ \langle \varphi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 0,982 B^{-1} - 0,117 B^{-2} + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

liefert; $f^{(1)}(\varphi)$ und $f^{(2)}(\varphi)$ sind von Molière tabulierte Funktionen. Die Fehler, die entstehen, wenn man die Potenzreihen in (3) und (8) nach dem

Glied mit B^{-2} abbricht, werden für $\Omega_b > 20$ vernachlässigbar. Diese Forderung ist in Kernemulsionen für Zellenlängen oberhalb 10μ stets erfüllt.

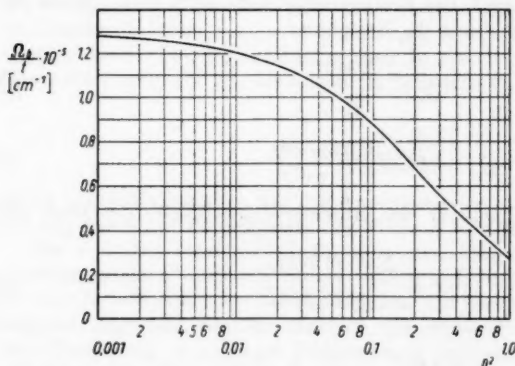


Abb. 1. Der Parameter Ω_b/t als Funktion von β^2 für die Agfa-K2-Emulsion bei 60% relativer Luftfeuchtigkeit ($z = 1$)

geben sich bequeme Zahlenwerte, wenn man Winkel in Grad, $p v$ in MeV und t in Einheiten von 100μ mißt. Dann folgt aus (3) und (8) für die Agfa-K2-Emulsion:

$$K = 7,47 L(B) \left[\frac{\text{Grad} \cdot \text{MeV}}{(100 \mu)^{1/2}} \right], \quad (9)$$

$$K_{eo} = 13,24 L_{eo}(B) \left[\frac{\text{Grad} \cdot \text{MeV}}{(100 \mu)^{1/2}} \right]. \quad (10)$$

In Abb. 2 sind die berechneten Streufaktoren als Funktion von Ω_b für den Wertebereich $100 \leq \Omega_b \leq 10000$ wiedergegeben. Kurvenscharen für K und $K_{e.o.}$ als Funktion von β^2 mit t als Parameter können mit Hilfe der Kurven der Abb. 1 und 2 leicht konstruiert werden.

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, über Näherungsformeln zu verfügen, in denen die t -Abhängigkeit des Streufaktors durch eine Potenzfunktion approximiert wird. Für diesen Zweck erscheinen uns Formeln der Gestalt

$$(8) \quad K(\beta^2, t) = K(\beta^2, t_e) \left(\frac{t}{t_e} \right)^\kappa \quad (11)$$

(und analog für $K_{e.o.}$) geeignet, wobei t_e eine feste Zellenlänge bezeichnet. Für die Agfa-K2-Emulsion erhalten wir auf diese Weise mit $t_e = 80 \mu$ und $\kappa = 0,06$ eine Näherungsformel, die den Streufaktor $K_{e.o.}$ in den Bereichen $15 \mu \leq t \leq 200 \mu$ und $0,001 \leq \beta^2 \leq 0,1$ mit guter Genauigkeit wiedergibt. Die größten Abweichungen, die in

den Randpunkten der genannten Bereiche auftreten, liegen bei etwa 0,7%. Für $40 \mu \leq t \leq 200 \mu$ kann der Gültigkeitsbereich der Näherungsformel mit der gleichen Genauigkeit auf $0,001 \leq \beta^2 \leq 1$ ausgedehnt werden. Bei vielen praktischen Anwendungen ist die Genauigkeit, mit der man Formeln der Gestalt (11) benutzen kann, noch beträchtlich größer, da bei großen β^2 -Werten große Zellenlängen, bei kleinen β^2 -Werten kleine Zellenlängen zur Anwendung kommen und somit nur ein gewisser diagonaler Bereich der (β^2, t) -Ebene benutzt wird [vgl. Anm.¹⁵⁾].

III. Berechnung eines Zellschemas für Protonen

Mit den numerischen Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts und der in der Arbeit ¹⁾ berechneten Energie-Reichweite-Beziehung sind wir jetzt in der Lage, ein Zellschema für Protonen zu konstruieren. Als Erwartungswert der Beträge der zweiten Differenzen legen wir $0,500 \mu$ zugrunde. Dieser Wert ist etwa viermal so groß wie der Mittelwert der Beträge der zweiten Differenzen der unechten Streuung (s. Abschn. V).

Mißt man die mit der Koordinatenmethode erhaltenen Winkel im Bogenmaß, $p v$ in MeV und Längen in μ , so ist der mittlere Betrag der zweiten Dif-

¹⁵⁾ In dem Bereich der (β^2, t) -Ebene, mit dem wir es bei der Berechnung des Zellschemas und der Korrekturfunktionen (Abschn. IV) zu tun haben, betragen die Abweichungen dieser Formel von den genauen Werten der Abb. 2 weniger als 0,3%.

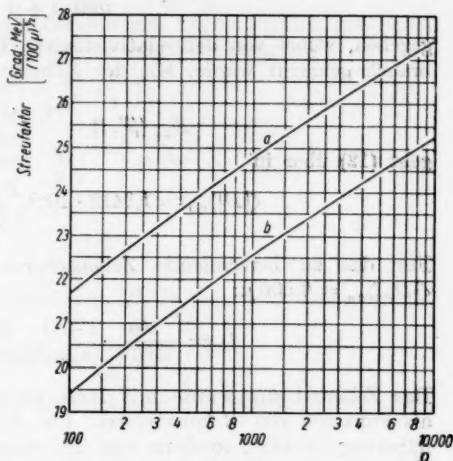


Abb. 2. Die Streufaktoren K (Kurve a) und $K_{e.o.}$ (Kurve b) als Funktion von Ω_b für die Agfa-K2-Emulsion bei 60% relativer Luftfeuchtigkeit ($z = 1$)

ferenzen beim Abschneiden der Streuwinkelverteilung oberhalb des vierfachen Mittelwertes durch die Formel

$$\langle |D| \rangle_{eo} = \frac{\pi}{1800} \cdot \frac{K_{eo}(\beta^2, t)}{1 + (1 - \beta^2)^{1/2}} \cdot \frac{t^{1/2}}{E(R)} \quad (12)$$

gegeben, wobei von der relativistischen Beziehung zwischen pv und E Gebrauch gemacht wurde. Mit der Näherungsformel¹⁶⁾

$$K_{eo}(\beta^2, t) = \frac{K_{eo}(\beta^2, 80 \mu)}{1,3007} t^{0,06} \quad (13)$$

geht (12) über in

$$\langle |D| \rangle_{eo} = 1,3418 \cdot 10^{-3} \frac{K_{eo}(\beta^2, 80 \mu)}{1 + (1 - \beta^2)^{1/2}} \cdot \frac{t^{1,56}}{E(R)} \quad (14)$$

Für das zu berechnende Zellschema für Protonen folgt hieraus mit $\langle |D_P| \rangle_{eo} = 0,500 \mu$:

$$t_P = \left[\frac{500}{1,3418} \cdot \frac{1 + (1 - \beta_P^2)^{1/2}}{K_{eo}(\beta_P^2, 80 \mu)} E_P(R) \right]^{\frac{1}{1,56}} \quad (15)$$

Das Zellschema wurde mit Hilfe einer graphischen Darstellung von t_P als Funktion von R konstruiert. Für $E_P(R)$ wurde hierbei keine Potenznäherung benutzt, sondern von den numerischen Werten der Tab. 4 in ¹⁾ Gebrauch gemacht. Die Länge t_k der an der Stelle $R_k = R_{k-1} + t_{k-1}$ beginnenden Zelle wurde durch sukzessive Näherung mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} t_k^{(0)} &= t_P(R_k), \\ t_k^{(1)} &= \frac{1}{2} [t_k^{(0)} + t_P(R_k + t_k^{(0)})], \\ t_k^{(2)} &= \frac{1}{2} [t_k^{(0)} + t_P(R_k + t_k^{(1)})], \dots \end{aligned}$$

bestimmt. Das so erhaltene Schema ist im Anhang wiedergegeben.

IV. Anwendung des Protonenschemas auf Teilchen unbekannter Masse

Wendet man das Protonenschema auf ein Teilchen der Masse $M_x \neq M_P$ an, so folgt für den Erwartungswert $\langle |D_x| \rangle_{eo}$ durch Einsetzen von (15) in (14)

$$\langle |D_x| \rangle_{eo} = 0,500 \cdot g_1(R, M_x) \cdot g_2(R, M_x) \cdot \frac{E_P(R)}{E_x(R)} \quad (16)$$

mit

$$g_1(R, M_x) = \frac{K_{eo}(\beta_x^2, 80 \mu)}{K_{eo}(\beta_P^2, 80 \mu)}$$

und

$$g_2(R, M_x) = \frac{1 + (1 - \beta_P^2)^{1/2}}{1 + (1 - \beta_x^2)^{1/2}}.$$

Die Änderung von $g_1 \cdot g_2$ beträgt im Reichweitebereich $0 \leq R \leq 13000 \mu$ für Tritonen, Deuteronen und K -Mesonen etwa 0,5%, für π - und μ -Mesonen etwa 3%.

Wir untersuchen jetzt den Faktor $E_p(R)/E_x(R)$. Nach ¹⁾ ist für Reichweiten oberhalb etwa 800μ in der Agfa-K2-Emulsion

$$E_p(R) \approx 0,263 R^{0,569} \quad (17)$$

Da zwischen den Energie-Reichweite-Beziehungen zweier einfach geladener Teilchen mit den Massen M_p und M_x die bekannte Beziehung

$$R_p \left(\frac{M_p}{M_x} E \right) = \frac{M_p}{M_x} R_x(E) \quad (18)$$

besteht, folgt aus (17)

$$E_x(R) \approx 0,263 \left(\frac{M_x}{M_p} \right)^{0,431} R^{0,569} \quad (19)$$

und damit für den betrachteten Quotienten

$$\frac{E_p(R)}{E_x(R)} \approx \left(\frac{M_p}{M_x} \right)^{0,431} \quad (20)$$

Führen wir eine weitere Korrekturfunktion $g_3(R, M_x)$ ein, so können wir für beliebige Reichweiten

$$\frac{E_p(R)}{E_x(R)} = g_3(R, M_x) \left(\frac{M_p}{M_x} \right)^{0,431} \quad (21)$$

setzen, wobei zu erwarten ist, daß g_3 nur für kleine R merklich von Eins abweicht.

Mit (21) geht (16) über in

$$\langle |D_x| \rangle_{eo} = 0,500 \cdot g(R, M_x) \left(\frac{M_p}{M_x} \right)^{0,431}, \quad (22)$$

$g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$. Es wurde eine Berechnung des Faktors g für Tritonen, Deuteronen, K^- , π^- und μ^- -Mesonen durchgeführt¹⁶⁾. Die Ergebnisse sind in Abb. 3

als Funktion der Anzahl n der mit dem t_p -Schema gemessenen zweiten Differenzen wiedergegeben. Da die unterhalb $R = 200 \mu$ aufgenommenen Meßwerte bei langen Spuren nicht stark in Gewicht fallen, können wir $g(R, M_x)$ in (22) in erster Näherung vernachlässigen. Dann folgt für M_x die einfache Beziehung

$$M_x = M_p \left(\frac{0,500}{\langle |D_x| \rangle_{eo}} \right)^{2,32}, \quad (23)$$

wobei für $\langle |D_x| \rangle_{eo}$ der an der Spur gemessene Stichprobenmittelpunkt \bar{D}_x einzusetzen ist, der sich nach dem Eliminieren der oberhalb des vierfachen Mittelwertes gelegene Elemente ergibt.

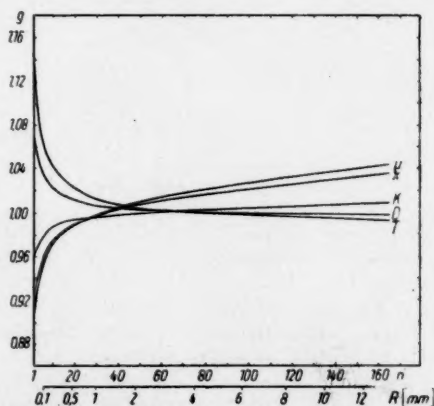


Abb. 3. Der Faktor $g(R, M_x)$ für Tritonen, Deuteronen, K^- , π^- und μ^- -Mesonen

¹⁶⁾ Hierbei wurden für $E_p(R)$ die Werte der Tab. 4 in ¹⁾ benutzt. Die entsprechenden Werte $E_x(R)$ wurden Energie-Reichweite-Kurven entnommen, die man gemäß (18) an Hand der genannten Tabelle berechnen kann.

Hat man auf diese Weise eine erste Abschätzung für die Teilchenmasse erhalten, so kann durch Berücksichtigung des Faktors $g(R, M_x)$ ein zweiter Näherungswert berechnet werden. Es sei $g(R_i, M_x)$ der der i -ten zweiten Differenz entsprechende Wert von $g(R, M_x)$. Dann ist für den Stichprobenmittelwert \bar{D}_x gemäß (22) die Größe

$$0,500 \left(\frac{M_p}{M_x} \right)^{0,431} \bar{g}(R, M_x)$$

mit

$$\bar{g}(R, M_x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(R_i, M_x)$$

zu erwarten, so daß sich an Stelle von (23) die Formel

$$M_x = M_p \left[\bar{g}(R, M_x) \frac{0,500}{\langle D_x \rangle_{eo}} \right]^{2,32} \quad (24)$$

ergibt. Kurven für $g(R, M_x)$ als Funktion von n sind in Abb. 4 für Tritonen, Deuteronen, K -, π - und μ -Mesonen wiedergegeben. In Tab. 1 sind die Werte \bar{D}_x , die nach (24) für die genannten Teilchen zu erwarten sind, für 6 verschiedene

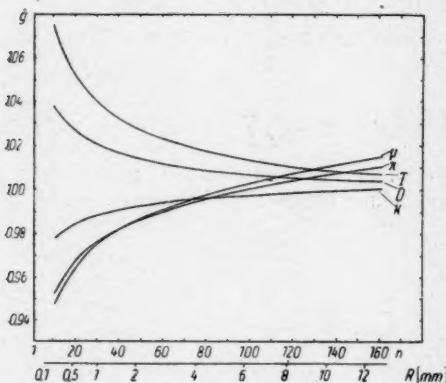


Abb. 4. Der Faktor $\bar{g}(R, M_x)$ für Tritonen, Deuteronen, K -, π - und μ -Mesonen

Wert beschränken. Im Falle einer Statistik jedoch, die eine größere Anzahl gleichartiger Spuren umfaßt, sollte der Einfluß des Faktors \bar{g} stets berücksichtigt werden.

Da man bei der Koordinatenmethode die Projektion der Spur auf die Emulsionsoberfläche untersucht, beziehen sich die Formeln (23) und (24) in der oben angegebenen Form auf Spuren, die parallel zur Emulsionsoberfläche verlaufen. Bei der Anwendung des Zellschemas auf geneigte Spuren hat man die Größen R und t_p in der Tabelle des Anhangs mit der projizierten Restreichweite und der projizierten Zellenlänge zu identifizieren und am Ergebnis der Messung eine entsprechende Neigungskorrektur anzubringen¹⁷⁾. Der Erwartungswert der Beträge der zweiten Differenzen einer

¹⁷⁾ M. G. K. Menon, C. O'Ceallaigh*, Philos. Mag. 44, 1251 (1953).

in der
Winkel
dann u
größer
fläche
annäher
Spur er

$M_x =$

Hinsich
n mit
in 1) ve
weiten
(cos δ)

Zur
wartun
berechn
13 Prot
schen
($\bar{R} \approx 8$
400 μ
der Zug
Bei der
geachte
Emulsi
Neigung
entwick
Falle v

Die
in Zus
des VI
führung
Zeiß-U
führt.
Tischb
bedingt
den m
wurde
der Ze

"1)
R-Abhän
tivistisch
Benutz

in der unentwickelten Emulsion um dem Winkel δ geneigten Spur erweist sich dann um den Faktor $\varrho(\delta) = (\cos \delta)^{n-1,56}$ größer als bei einer parallel zur Oberfläche verlaufenden Spur¹⁸⁾. Im Falle annähernd gleichförmiger Neigung der Spur erhalten wir dann an Stelle von (24):

$$M_x = M_P \left[\varrho(\delta) g(R, M_x) \frac{0,500}{\langle D_x \rangle_{eo}} \right]^{2,32} \quad (25)$$

Hinsichtlich der Änderung des Exponenten n mit der Restreichweite sei auf Tab. 5 in ¹⁾ verwiesen. Für lange Spuren (Reichweiten oberhalb etwa 1000 μ) kann $\varrho(\delta) = (\cos \delta)^{-0,99}$ gesetzt werden.

V. Eichmessungen an langen Protonenspuren

Zur experimentellen Prüfung des Erwartungswertes $\langle D_P \rangle_{eo}$ wurden mit dem berechneten Zellschema Messungen an 13 Protonenspuren mit Reichweiten zwischen 5000 und 12000 μ vorgenommen ($\bar{R} \approx 8500 \mu$). Die Spuren stammen aus 400 μ dicken Agfa-K2-Platten, die auf der Zugspitze exponiert worden waren. Bei der Auswahl der Spuren wurde darauf geachtet, daß sie möglichst weit vom Emulsionsrand entfernt verliefen. Der Neigungswinkel der Spuren in der unentwickelten Emulsion betrug in jedem Falle weniger als 4°.

Die Messungen wurden mit Hilfe eines in Zusammenarbeit mit dem Mikrolabor des VEB Zeiß, Jena, für die Durchführung von Streumessungen umgebauten Zeiß-Universalmeßmikroskops durchgeführt. Der durch die Abweichungen der Tischbewegung von der Geradlinigkeit bedingte Beitrag zu unechten Streuung, den man als „stage noise“ bezeichnet, wurde interferometrisch als Funktion der Zellenlänge untersucht. Die erhal-

¹⁸⁾ Bei Vernachlässigung der schwachen R-Abhängigkeit des Streufaktors und des relativistischen Faktors $[1 + (1 - \beta^2)^{1/2}]$ und bei Benutzung einer Potenznäherung für $E(R)$.

Tabelle 1

	Erwartungswerte für $\bar{D}_x [\mu]$					$\frac{\overline{D}_x}{\bar{D}_x}$
	Tritonen $M = 2,9827 M_P$	Deuteronen $M = 1,9985 M_P$	Protonen $M = M_P$	K-Mesonen $M = 0,9365 M_P$	π -Mesonen $M = 0,1488 M_P$	μ -Mesonen $M = 0,1127 M_P$
nach Gl. (24) für						
$R = 300 \mu$	0,333	0,384	0,500	0,646	1,09	1,22
$R = 500 \mu$	0,329	0,381	0,500	0,649	1,10	1,24
$R = 1000 \mu$	0,324	0,378	0,500	0,652	1,11	1,25
$R = 2000 \mu$	0,321	0,376	0,500	0,654	1,12	1,27
$R = 4000 \mu$	0,318	0,374	0,500	0,656	1,13	1,28
$R = 8000 \mu$	0,315	0,373	0,500	0,658	1,14	1,29
$R = 12000 \mu$	0,314	0,372	0,500	0,659	1,15	1,30
nach Gl. (23)	0,312	0,371	0,500	0,659	1,14	1,28

tenen Ergebnisse zeigen¹⁹⁾, daß der Beitrag des „stage noise“ bei dem benutzten Mikroskop für Zellenlängen bis zu 200 μ gegenüber den durch die asymmetrische Verteilung der Körner um die Bahn und die Ablesefehler bedingten Beiträgen vernachlässigbar ist, so daß die t -Abhängigkeit der unechten Streuung für die bei der Anwendung des t_p -Schemas in Frage kommenden Zellenlängen unberücksichtigt bleiben kann²⁰⁾.

Sämtliche Messungen wurden mit dem (durch Halbierung der im Anhang angegebenen Zellenlängen entstehenden) Zellsystem $\frac{1}{2} t_p$ vorgenommen.

Die zweiten Differenzen für die Zellenlängensysteme der Form $\frac{k+1}{2} t_p$, $k = 1, 2, \dots$, wurden aus den mit dem System $\frac{1}{2} t_p$ gemessenen ersten Differenzen berechnet. Bei der Ablesung der y -Koordinaten wurde die Anpassungslänge (s. Anm. ¹³⁾) längs der Spur derart variiert, daß stets die Bedingung $\varepsilon < 0,15 t_p$ erfüllt war. Eine zusätzliche Glättungskorrektur war somit nicht erforderlich. Das gleiche gilt für die Neigungskorrektur, die bei den benutzten Spuren weniger als 0,25% ausmacht.

Die Eliminierung der unechten Streuung erfolgte durch Kombination der bei zwei verschiedenen Zellenlängensystemen t_n und t_m erhaltenen Meßergebnisse unter der Voraussetzung, daß die Zellenlängenabhängigkeit der unechten Streuung vernachlässigt werden kann. Es sei $\bar{D}_b(t_n)$ der Mittelwert der Beträge der mit dem Zellenlängensystem t_n gemessenen zweiten Differenzen der beobachteten Streuung (echte Vielfachstreuung + unechte Streuung), der sich nach dem Eliminieren der oberhalb des vierfachen Mittelwertes gelegenen Elemente ergibt. $\bar{D}(t_n)$ sei der zugehörige Mittelwert der Beträge der zweiten Differenzen der echten Streuung, während \bar{D}_u den Mittelwert der Beträge der zweiten Differenzen der unechten Streuung bezeichnet. Aus den drei Beziehungen

$$\bar{D}(t_m) = \bar{D}(t_n) \left(\frac{t_m}{t_n} \right)^{1,56}, \quad (26)$$

$$\bar{D}_b^2(t_m) = \bar{D}^2(t_m) + \bar{D}_u^2, \quad (27)$$

$$\bar{D}_b^2(t_n) = \bar{D}^2(t_n) + \bar{D}_u^2 \quad (28)$$

folgt dann

$$\bar{D}^2(t_m) = \frac{\bar{D}_b^2(t_m) - \bar{D}_b^2(t_n)}{1 - \left(\frac{t_n}{t_m} \right)^{3,12}}, \quad (29)$$

$$\bar{D}_u^2 = \frac{\bar{D}_b^2(t_n) - \left(\frac{t_n}{t_m} \right)^{3,12} \bar{D}_b^2(t_m)}{1 - \left(\frac{t_n}{t_m} \right)^{3,12}}. \quad (30)$$

¹⁹⁾ D. Bebel, Diplomarbeit, Humboldt-Universität, Berlin, 1957.

²⁰⁾ Näheres zur Definition der unechten Streuung und ihrer einzelnen Beiträge (siehe ⁷⁾). Die bei unseren Messungen erhaltenen oberen Grenzen für das „stage noise“ liegen für Zellenlängen von 20 bis 100 μ zwischen 0,01 und 0,03 μ , für $t = 200 \mu$ bei 0,05 μ und für $t = 500 \mu$ bei 0,08 μ .

Die For
nutzen

t_n

$\frac{1}{2} t_p$

$\frac{1}{2} t_p$

$\frac{1}{2} t_p$

Wir

$\bar{D}_b \left(\frac{1}{2} t_p \right)$

kombin
zusamm
system
Vergle
Vernac
sind un

ruft di

nach (2

aber be

stik ni

hängig

berück

sobald

stehen.

$\bar{D}_b(2 t_p)$

faktors

das Au

berück

Die

halten

wieder

werte f

Bei de

ein rel

Die Formeln (29) und (30) unterscheiden sich von den üblicherweise benutzten durch die Berücksichtigung der t -Abhängigkeit des Streufaktors.

Tabelle 2

t_n	t_m	$\bar{D}_u [\mu]^{21})$	
		bei Berücksichtigung der t -Abhängigkeit des Streufaktors	ohne Berücksichtigung der t -Abhängigkeit des Streufaktors
$\frac{1}{2} t_p$	t_p	$0,120 \pm 0,007$	$0,105 \pm 0,008$
$\frac{1}{2} t_p$	$\frac{3}{2} t_p$	$0,123 \pm 0,007$	$0,104 \pm 0,009$
$\frac{1}{2} t_p$	$2 t_p$	$0,123 \pm 0,007$	$0,093 \pm 0,010$

Wir haben bei der Berechnung der unechten Streuung nach (30) $\bar{D}_b(t_n) = \bar{D}_b(\frac{1}{2} t_p)$ gesetzt und zunächst mit $\bar{D}_b(t_p)$, dann mit $\bar{D}_b(\frac{3}{2} t_p)$ und $\bar{D}_b(2 t_p)$ kombiniert. Es ergeben sich für \bar{D}_u im Mittel die in der 3. Spalte der Tab. 2 zusammengestellten Werte. Zwischen den mit verschiedenen Zellenlängensystemen t_m erhaltenen Werten besteht sehr gute Übereinstimmung. Zum Vergleich sind in der 4. Spalte die Ergebnisse zusammengestellt, die man bei Vernachlässigung der t -Abhängigkeit des Streufaktors erhält. Diese Werte sind um 15 bis 25% kleiner als die Werte der Spalte 3. Im Falle eines Protons ruft die Benutzung der Werte der Spalte 4 bei der Berechnung von $\bar{D}(t_p)$ nach (27) einen systematischen Fehler von 1% hervor, im Falle eines Tritons aber bereits einen systematischen Fehler von 3%, der bei einer großen Statistik nicht mehr vernachlässigbar ist. Es ist daher zu empfehlen, die t -Abhängigkeit des Streufaktors bei der Eliminierung der unechten Streuung zu berücksichtigen, zumal dies keinen zusätzlichen Rechenaufwand erfordert, sobald für den Streufaktor Näherungsformeln der Gestalt (11) zur Verfügung stehen. Setzt man in (30) $\bar{D}_b(t_n) = \bar{D}_b(t_p)$ und $\bar{D}_b(t_m) = \bar{D}_b(\frac{3}{2} t_p)$ bzw. $\bar{D}_b(2 t_p)$, so erhält man bei Vernachlässigung der t -Abhängigkeit des Streufaktors für \bar{D}_u relativ häufig imaginäre Werte. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten solcher Fälle nimmt erheblich ab, falls die genannte Abhängigkeit berücksichtigt wird.

Die Verteilungen der nach (29) mit $t_n = \frac{1}{2} t_p$ und $t_m = t_p, \frac{3}{2} t_p$ und $2 t_p$ erhaltenen Stichprobenmittelwerte für die 13 Protonenspuren sind in Abb. 5 wiedergegeben. Die eingezeichneten Pfeile geben die Lage der Erwartungswerte für Protonen an, die punktierten Linien die Mittelwerte der Verteilungen. Bei der Konstruktion der Diagramme wurde jedem Stichprobenmittelwert ein relativer statistischer Fehler

$$\frac{\sigma}{\bar{D}_x} = \frac{0,756}{\sqrt{q n}} w(\bar{D}_x) \quad (31)$$

²¹⁾ Mittelwerte über 18 Spuren.

mit

$$w(\bar{D}_x) = \left[1 + 2 \left(\frac{\bar{D}_u}{\bar{D}_x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{D}_u}{\bar{D}_x} \right)^4 \right]^{1/4} \quad (32)$$

zugeordnet. Hierbei ist unter n die Anzahl der statistischen Elemente nach Anwendung des Abschneideverfahrens zu verstehen. Der Faktor q ist gleich 0,89, falls die Messungen ohne Überlappung der Zellen ausgewertet werden,

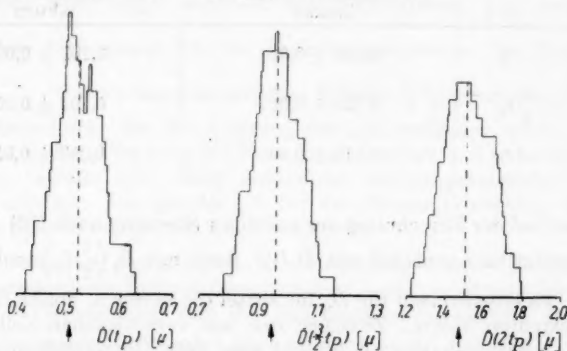


Abb. 5. Verteilungen der Mittelwerte $\bar{D}(t_p)$, $\bar{D}\left(\frac{3}{2}t_p\right)$ und $\bar{D}(2t_p)$

und gleich 0,455 im Falle einfacher Überlappung^{22,23}). Der Ausdruck (31) folgt aus (27) bei Approximation der Streuwinkelverteilungen durch Gaußkurven und Berücksichtigung der statistischen Schwankungen der unechten Streuung³).

Da die Genauigkeit, mit der die Bestimmung des Abschneidewertes und die Eliminierung der unechten Streuung vorgenommen werden können, um so größer ist, je größer der Umfang der betrachteten Stichprobe ist, wurden alle an den Protonenspuren gemessenen zweiten Differenzen in einer gemeinsamen Statistik zusammengefaßt. Die auf der Grundlage dieser Statistik nach (29) mit $t_n = \frac{1}{2}t_p$ erhaltenen Mittelwerte $\bar{D}(t_p)$, $\bar{D}\left(\frac{3}{2}t_p\right)$ und $\bar{D}(2t_p)$ sind in der zweiten Zeile der Tab. 3 zusammengestellt. Die angegebenen Fehler wurden nach (31) berechnet²⁴). Wie die in der 5. Zeile der Tabelle einge-

²² Im Falle $t_m = t_p$ wurde mit einfach überlappenden Zellen gearbeitet, während in den Fällen $\frac{3}{2}t_p$ und $2t_p$ von der Überlappungstechnik kein Gebrauch gemacht wurde.

²³ G. O'Ceallaigh u. O. RoCHAT, Philos. Mag. 42, 1050 (1951).

²⁴ Im Ergebnis einer auf der Grundlage der gemeinsamen Statistik vorgenommenen experimentellen Bestimmung der Streuung $\sigma = a \bar{D}_b(t_p)$ der Beträge der zweiten Differenzen der beobachteten Streuung $|D_b(t_p)|$ um ihren Mittelwert $\bar{D}_b(t_p)$ ergab sich die Konstante a zu $0,78 \pm 0,02$ (in guter Übereinstimmung mit dem von Huybrechts auf der Grundlage der Molièreschen Streuwinkelverteilung für den Fall des „universal rigorous cut-off“ erhaltenen Wert $a = 0,79$ ²⁵). Die in Tab. 3 angegebenen Fehler dürften somit nur geringfügig unterschätzt sein.

Tabelle 3

t_m	t_p	$\frac{3}{2} t_p$	$2 t_p$
$\bar{D}(t_m) [\mu]$	$0,518 \pm 0,012$	$0,962 \pm 0,026$	$1,510 \pm 0,046$
$\langle D_p(t_m) \rangle_{eo} [\mu]$	0,500	0,941	1,47
$\langle D_p(t_m) \rangle_{eo} [\mu]$ (bei Berücksichtigung d. unelast. Streuung durch die Atomelektronen)	0,509	0,957	1,50
$\left(\frac{t_p}{t_m}\right)^{1,56} \bar{D}(t_m) [\mu]$	$0,518 \pm 0,012$	$0,511 \pm 0,014$	$0,512 \pm 0,016$
$\bar{D}_u [\mu]$	$0,121 \pm 0,008$	$0,125 \pm 0,009$	$0,124 \pm 0,010$

tragenen reduzierten Werte zeigen, besteht sehr gute Konsistenz zwischen den mit den drei verschiedenen Zellenlängensystemen erhaltenen Ergebnissen, so daß eine Beeinflussung der Resultate durch Verzerrungen innerhalb der Fehlergrenzen ausgeschlossen werden kann. Zum Vergleich mit den experimentellen Daten sind in der 3. Zeile die theoretischen Werte eingetragen. In der 4. Zeile sind die Erwartungswerte angegeben, die man bei Berücksichtigung der unelastischen Streuung durch die Atomelektronen erhält. Dieser Beitrag ist in der Molièreschen Theorie nicht enthalten, kann aber näherungsweise einbezogen werden, indem man in (3) und (6) bzw. (8) Z_i^2 durch $Z_i(Z_i + 1)$ ersetzt²⁵⁾ 26). Die numerische Rechnung liefert in diesem Fall für die Agfa-K2-Emulsion Streufaktoren, die um 1,7% größer sind als die im Abschnitt II berechneten Werte. Die 6. Zeile der Tabelle enthält die auf der Grundlage der gemeinsamen Statistik nach (30) erhaltenen Mittelwerte der unechten Streuung.

VI. Schlußfolgerungen

Wie aus den in Tab. 3 zusammengestellten Daten hervorgeht, ergibt die Anwendung des für die Agfa-K2-Emulsion berechneten Zellschemas auf Protonen gute Übereinstimmung mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Die bezüglich der Streuung durch die Atomelektronen korrigierten Erwartungswerte liegen im Bereich des einfachen statistischen Fehlers der experimentellen Ergebnisse. Diese Übereinstimmung ist zugleich eine grobe indirekte Bestätigung der bei der Berechnung des Schemas benutzten Energie-Reichweite-Kurve der Arbeit¹⁾.

Solange keine weiteren Eichdaten vorliegen, ist bei Anwendungen zu empfehlen, in den Formeln (23), (24) bzw. (25) an Stelle von $0,500 \mu$ den experimentellen Wert $\bar{D}(t_p) = (0,518 \pm 0,012) \mu$ zu benutzen. Für die in Tab. 1 angegebenen Erwartungswerte bedeutet dies eine Erhöhung um $(3,6 \pm 2,4)\%$, wobei eine Erhöhung um etwa 2% durch den Beitrag der un-

²⁵⁾ L. A. Kulchitsky, G. D. Latyshev, Physic. Rev. **61**, 254 (1942).

²⁶⁾ H. A. Bethe, Physic. Rev. **80**, 1256 (1953).

elastischen Streuung durch die Atomelektronen zu erklären ist. Eine Erhöhung der Erwartungswerte um den genannten Betrag steht im Einklang mit den Ergebnissen umfangreicher Eichexperimente, die mit Ilford-G5-Emulsionen durchgeführt wurden. Von Johnston²⁷⁾ wurde ein Vergleich der aus diesen Experimenten folgenden Streufaktoren mit den Streufaktoren, die sich aus der Molièreschen Theorie ohne Berücksichtigung der unelastischen Streuung durch die Atomelektronen ergeben, durchgeführt. Er erhielt die beste Übereinstimmung bei einer Erhöhung der nach Molière berechneten Werte um $(3,4 \pm 1,3)\%$.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Richter für die Ermöglichung und Unterstützung der vorliegenden Untersuchungen meinen Dank aussprechen. Herrn Dr. K. Lanius danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Diskussionen. Den Herren Dr. H. Gause und H. Beyer vom VEB Zeiß, Jena, und ihren Mitarbeitern gilt mein Dank für die sorgfältige Ausführung der am Universalmeßmikroskop erforderlichen Umbauten. Dem Laborantenkollektiv der Abteilung „Physik höchstenergetischer Prozesse“ des Kernphysikalischen Institutes danke ich für die Hilfe bei der Auswertung der Messungen.

Anhang I

Hinweis auf eine Möglichkeit zur Verbesserung des Auflösungsvermögens der „constant sagitta“-Methode

Bei Untersuchungen der relativen Häufigkeit einzelner Teilchensorten bei bestimmten Prozessen wird im allgemeinen nur von den mit einem bestimmten Zellenlängensystem unmittelbar erhaltenen Mittelwerten Gebrauch gemacht, z. B. lediglich von $D(t_p)$. Da zwischen den einzelnen Größen $\bar{D}\left(\frac{k+1}{2}t_p\right)$, $k = 1, 2, \dots$, eine zwar beachtliche, aber keineswegs vollständige statistische Korrelation besteht, ist eine Verbesserung des Auflösungsvermögens der Methode zu erwarten, wenn man bei jeder Stichprobe zusätzlich auch die mit den Zellenlängensystemen $\frac{3}{2}t_p$ und $2t_p$ bzw. (bei hinreichend langen Spuren) mit noch höheren Vielfachen von $\frac{1}{2}t_p$ erhaltenen Informationen heranzieht, die einschließlich $\bar{D}(t_p)$ zu einem gewichteten Mittelwert

$$\bar{D}^*(t_p) = \frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1,5+\kappa} \bar{D}\left(\frac{k+1}{2}t_p\right)}{\sum_{k=1}^N \lambda_k} = 1, \quad (33)$$

zusammengefaßt werden können. Die Gewichtungsfaktoren λ_k sind hierbei umgekehrt proportional den relativen statistischen Fehlern der Größen $\bar{D}\left(\frac{k+1}{2}t_p\right)$ zu wählen. Voraussetzung für die Anwendung der Formel (33) ist natürlich,

²⁷⁾ R. H. W. Johnston, Suppl. Nuovo Cim. 4, 456 (1956).

daß vorhandene Verzerrungen vernachlässigbar sind, was vorher an jeder Spur nachgeprüft werden muß.

In Abb. 6 sind als vorläufiges Ergebnis die Verteilungen der Größen $\bar{D}(t_p)$ und $\bar{D}^*(t_p)$ für die bei der Eichung unseres Schemas benutzten Protonenspuren einander gegenübergestellt ($\alpha = 0,06$; $N = 3$). Die unter den Diagrammen eingezeichneten Striche geben die Lage der einzelnen stati-

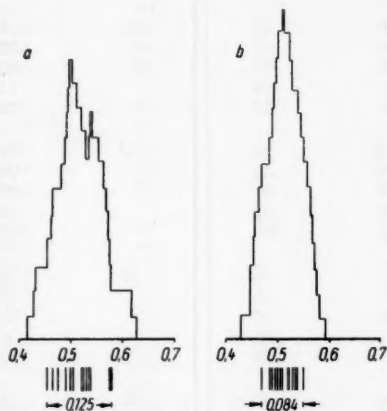


Abb. 6. Vergleich der Verteilungen der Größen $\bar{D}(t_p)$ (Abb. a) und $\bar{D}^*(t_p)$ (Abb. b) für 13 Protonenspuren

stischen Elemente an. Bei der Konstruktion des Diagramms der gewichteten Mittelwerte wurde jedem $\bar{D}^*(t_p)$ -Wert derselbe statistische Fehler zugeordnet wie dem entsprechenden $\bar{D}(t_p)$ -Wert. Die Mittelwerte der beiden Verteilungen betragen $\bar{D}(t_p) = (0,516 \pm 0,010) \mu$ und $\bar{D}^*(t_p) = (0,512 \pm 0,007) \mu$, stimmen also innerhalb der Fehlergrenzen überein. Die mittlere quadratische Abweichung der Größen $\bar{D}(t_p)$ von $\bar{D}(t_p)$ ergibt sich zu $\sigma(\bar{D}) = (0,037 \pm 0,007) \mu$, während wir für die mittlere quadratische Abweichung der Größen $\bar{D}^*(t_p)$ von $\bar{D}^*(t_p)$ erhalten: $\sigma(\bar{D}^*) = 0,025 \pm 0,005 \mu$. Obwohl die Statistik zu klein ist, um quantitative Schlußfolgerungen ziehen zu können, scheinen die Ergebnisse darauf hinzudeuten, daß die bei Verwendung gewichteter Mittelwerte der Gestalt (33) zu erwartende Erhöhung des Auflösungsvermögens der „constant-sagitta“-Methode in einem günstigen Verhältnis zu dem erforderlichen Mehraufwand an numerischer Rechnung steht.

Anhang II

Zellenlängenschema für Protonen ($\langle |D_p| \rangle_{eo} = 0,500 \mu$)

Nr.	$R [\mu]$	$t_p [\mu]$	Nr.	$R [\mu]$	$t_p [\mu]$
1	15	11	46	1834	62
	26	13		1896	63
	39	15		1959	64
	54	17		2023	65
	71	19		2088	65
6	90	21	51	2153	66
	111	23		2219	67
	134	24		2286	68
	158	26		2354	68
	184	27		2422	69
11	211	28	56	2491	70
	239	30		2561	70
	269	31		2631	71
	300	32		2702	72
	332	33		2774	73
16	365	35	61	2847	73
	400	36		2920	74
	436	37		2994	75
	473	38		3069	75
	511	39		3144	76
21	550	40	66	3220	77
	590	41		3297	77
	631	42		3374	78
	673	43		3452	79
	716	44		3531	79
26	760	45	71	3610	80
	805	46		3690	80
	851	47		3770	81
	898	48		3851	82
	946	49		3933	82
31	995	50	76	4015	83
	1045	51		4098	83
	1096	52		4181	84
	1148	53		4265	85
	1201	53		4350	85
36	1254	54	81	4435	86
	1308	55		4521	87
	1363	56		4608	87
	1419	57		4695	88
	1476	58		4783	88
41	1534	58	86	4871	89
	1592	59		4960	89
	1651	60		5049	90
	1711	61		5139	91
	1772	62		5230	91

Zellenlängenschema (Fortsetzung)

Nr.	R [μ]	t_p [μ]	Nr.	R [μ]	t_p [μ]
91	5321	92	126	8841	110
	5413	92		8951	110
	5505	93		9061	111
	5598	93		9172	111
	5691	94		9283	112
96	5785	94	131	9395	112
	5879	95		9507	113
	5974	95		9620	113
	6069	96		9733	114
	6165	96		9847	114
101	6261	97	136	9961	115
	6358	97		10076	115
	6455	98		10191	116
	6553	99		10307	116
	6652	99		10423	117
106	6751	100	141	10540	117
	6851	100		10657	118
	6951	101		10775	118
	7052	101		10893	119
	7153	102		11012	119
111	7255	102	146	11132	120
	7357	103		11252	120
	7460	103		11372	120
	7563	104		11492	121
	7667	104		11614	121
116	7771	105	151	11736	122
	7876	105		11858	122
	7981	106		11980	123
	8087	106		12103	123
	8193	107		12227	124
121	8300	107	156	12351	124
	8407	108		12476	125
	8515	108		12601	125
	8623	109		12727	126
	8732	109		12853	126

Zeuthen bei Berlin, Kernphysikalisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Gegenwärtige Anschrift des Verfassers: Dubna bei Moskau, Vereinigtes Institut für Kernforschung.

Bei der Redaktion eingegangen am 4. Mai 1959.

Elektronenbeugungsuntersuchungen dünner Metallaufdampfschichten und ihre gasinterferenztheoretische Deutung¹⁾

Von P. Midecke

Mit 11 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Die Gasinterferenztheorie wird auf die Elektronenbeugungserscheinungen dünner Metallschichten angewandt. Sie kann als eine Art Fourier-Synthese angesehen werden. Ihr Anwendungsbereich reicht beim „Festkörper“ von der praktisch regellosen Atomanordnung bis zum eindeutig kristallinen Streukörper. Die Struktur dünnster unterkühlt kondensierter Metallaufdampfschichten enthält feinstkristalline und amorphe Anteile. Die Untersuchungen zur Formerkennbarkeit der Feinstkristallite ergaben eine mehr oder weniger kugelförmige Gestalt. Auch ein Vierzehnfach ist möglich.

Mittels rotierender Sektorenblende wird die auf die Photoplatte auffallende Elektronenstreustrahlung in unmittelbarer Umgebung des Primärflecks einer exakteren Auswertung zugänglich gemacht.

I. Einleitung

Dünnste Schichten haben gegenüber eindeutig kristallinen Schichten größerer Dicke abweichende physikalische Eigenschaften. Diese Abweichungen sind eng mit dem Ordnungszustand in diesen Schichten verbunden²⁾. Mit dem Übergang des Ordnungszustandes vom niederen zum höheren gehen im allgemeinen die Eigenschaftswerte in die Standardwerte kompakter kristalliner Materialien über³⁾. Diese Änderung des Ordnungszustandes ist weitgehendst von der Beweglichkeit der die Schicht bildenden Atome abhängig. Da diese aber selbst bei starken Unterkühlungen nie gleich Null ist, wird auch bei tiefer Temperatur eine Strukturänderung auftreten⁴⁾.

Auch bei Elektronenbeugungs- und Röntgenstrukturuntersuchungen traten Anomalien auf. So hatte Trendelenburg⁵⁾ bei Drehfolienaufnahmen die 100-Linie des Goldes gefunden⁶⁾, die bei stillstehender Folie kaum ange-

¹⁾ Auszug aus der im Frühjahr 1956 von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg genehmigten Dissertation.

²⁾ Suhrmann und Barth, *Physik. Z.* **35**, 971 u. a. (1934).

³⁾ Vgl. Schopper, *Fortschr. Phys.* **2**, 275 (1954).

⁴⁾ Mitchell, *Physic. Rev.* **53**, 250 (1932).

⁵⁾ Trendelenburg, *Naturwiss.* **20**, 655 (1932).

⁶⁾ Die 100-Reflexion wurde ebenfalls von Eisenhut, *Verh. dtsh. physik. Ges.* **12**, 7 (1931), gefunden.

P. M

deutet
einen
geringe
sein so
Silizium
kleinen
von Si
Träger
atomen
dabei a
Einbau
größten
In Bi-
Existen
Schich

Nel
funden
die in
hängig
festges
Oberflä
stenz
Halte
änderu

Um
Schich
verteil

Für
tronen
und S
Ornst
Unters

7)
8)
9)
10)
11)
12)
13)
14)
15)
16)
17)
18)
19)
20)
21)

deutet war. König⁷⁾ fand in Beugungsbildern von Eisenaufdampfschichten einen verwaschenen Streuverlauf mit breiten flachen Ringen, deren Zahl geringer war, als nach der Gittertheorie in diesem Winkelbereich vorhanden sein sollte⁸⁾. In Beugungsaufnahmen der Halbmetalle Germanium und Silizium hatte Richter⁹⁾ verbreiterte Ringe gefunden, die er außergewöhnlich kleinen Kristalliten zuordnete. Später wurden auch in dünnsten Schichten von Si, Ge, As, Se und Sb, die geeignet hergestellt waren (nichtkristalline Trägerfolien, unterkühlte Kondensationsflächen, Gegenwart von Fremdatomen usw.), amorphe Strukturen gefunden. Der amorphe Zustand soll dabei auf Elemente mit homöopolarer Gitterbindung beschränkt sein. Beim Einbau von Cu-Atomen in Sn-Schichten fand Buckel¹⁰⁾ Kristallitgrößen, die gegenüber denen in reinsten Sn-Schichten verkleinert waren. In Bi-Schichten, die bei 4 °K kondensierten, war keinerlei Hinweis für die Existenz von Kleinstkristalliten vorhanden. Bei Erwärmung zeigten diese Schichten ein normales Beugungsbild mit Textur.

Neben Strukturänderungen sind auch Gitterkonstantenänderungen gefunden worden. Rymer und Butler¹¹⁾ nehmen an, daß hierfür Spannungen, die in der Umgebung von Fehlstellen auftreten, verantwortlich sind. Die Abhängigkeit der Gitterkonstanten von der Kristallitgröße ist von Boswell¹²⁾ festgestellt worden. Dies wird durch das Auftreten von Spannungen in den Oberflächenschichten erklärt, die den Kristall zusammendrücken. Die Existenz von Mikrospannungen in aufgedampften Metallfilmen wurde von Haltemann¹³⁾ nachgewiesen. Berry¹⁴⁾ fand bei Silber Gitterkonstantenänderungen von 2,7% bei Teilchengrößen von 31 ÅE.

II. Streuung chromatischer Elektronen

Um befriedigende Aussagen über das Streuverhalten der zu untersuchenden Schichten machen zu können, ist eine genaue Kenntnis der Intensitätsverteilung der Streustrahlung notwendig.

A. Unelastische Streuung

Für den theoretischen Verlauf der unelastischen Streustrahlung der Elektronenbeugung gibt es die Ansätze von Rutherford¹⁵⁾, Morse¹⁶⁾, Marton und Schiff¹⁷⁾, Koppe¹⁸⁾ usw. Die experimentellen Untersuchungen von Ornstein und Mitarbeitern¹⁹⁾, Tol²⁰⁾ und Leonhard²¹⁾ zeigten erhebliche Unterschiede zwischen den theoretischen und experimentellen Werten.

⁷⁾ König, *Optik* **3**, 201 (1948).

⁸⁾ Heck, *Z. Metallkde* **42**, 10 (1951); König, *Z. Metallkde* **43**, 26 (1952).

⁹⁾ Richter, *Physik. Z.* **44**, 406 (1943).

¹⁰⁾ Buckel, *Z. Physik* **138**, 136 (1954).

¹¹⁾ Rymer u. Butler, *Proc. Phys. Soc.* **59**, 541 (1947).

¹²⁾ Boswell, *Proc. Roy. Soc. London* **64**, 465 (1951).

¹³⁾ Haltemann, *J. appl. Physics* **23**, 150 (1952).

¹⁴⁾ Berry, *Physic. Rev.* **88**, 596 (1952).

¹⁵⁾ Rutherford, *Philos. Mag.* **21**, 669 (1911).

¹⁶⁾ Morse, *Physik. Z.* **32**, 740 (1931).

¹⁷⁾ Marton u. Schiff, *J. appl. Physics* **12**, 759 (1941).

¹⁸⁾ Koppe, *Z. Physik* **12**, 658 (1948).

¹⁹⁾ Ornstein, Brinkman, Hauer u. Tol, *Physica* **5**, 693 (1938).

²⁰⁾ Tol, *Physica* **9**, (1942).

²¹⁾ Leonhard, *Z. Naturforschg.* **9a**, 727 u. 1019 (1954).

Bei den eigenen Untersuchungen war vor der Platte im Strahlengang eine rotierende Sektorenblende²²⁾ angeordnet. Diese hatte eine Öffnung proportional zu $\sin^3 \vartheta/2$.

Die in der relativen Gesamtstreuintensität I_g (Abb. 1) noch enthaltene Untergrundstreuung (b) zeigte eine gute Übereinstimmung mit der Streufunktion $S_i = Z \cdot G_v$, die von Bewilogua²³⁾ für verschiedene Winkelwerte berechnet worden ist. Daraus kann gefolgert werden, daß die unelastische Streuung bei der vorliegenden Silberaufnahme proportional zu

$$S_i \cdot \sin^{-3} \vartheta/2$$

ist und nicht wie es Morse¹⁶⁾ fordert, proportional zu

$$S_i \cdot \sin^{-4} \vartheta/2.$$

Gleiche Ergebnisse wurden von gleich-dicken Goldschichten (~ 100 ÅE) erhalten, die gut auskristallisiert waren. Bei einigen dünneren Schichten (~ 20 ÅE) konnte dieser Verlauf der Untergrundstreuung jedoch nicht festgestellt werden. Es besteht vielmehr die Möglichkeit, daß diese proportional zu

$$S_i \cdot \sin^{-(3+x)} \vartheta/2$$

ist, wobei $0 \leq x \leq 1$ ist.

Von Bedeutung scheint hier das Verhältnis der Massendicke der Metallschicht

und der Trägerfolie zu sein. Werden die Massendicken der Metallschicht und der Trägerfolie miteinander vergleichbar, so hat die Streuung letztgenannten Verlauf.

B. Elastische Streuung

Die Intensitäten der elastischen Interferenzstreuung sind bestimmt durch

$$I = F \cdot S^2 \cdot L \cdot P \cdot e^{-M} \cdot J_0^2. \quad (1)$$

Hierbei ist

F	die Flächenhäufigkeitszahl ²⁴⁾
S	die Strukturamplitude
L	der Lorentzfaktor
P	der Polarisationsfaktor
e^{-M}	der Temperaturfaktor
J_0	die Wellenamplitude.

Für den Verlauf der Wellenamplitude liegen neben der klassischen Theorie von Rutherford¹⁵⁾ und deren wellenmechanische Erweiterung durch Mott²⁵⁾

²²⁾ Debye, Physik. Z. **40**, 66 u. 404 (1939); Bethge u. Brauer, Optik **10**, 399 (1953).

²³⁾ Bewilogua, Physik. Z. **32**, 740 (1931).

²⁴⁾ Für die verschiedenen Reflexionen angegeben bei v. Laue, Materiewellen und ihre Interferenzen, Leipzig 1948, S. 133–134.

²⁵⁾ Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **127**, 658 (1930).

theoretische Ansätze u. a. von Molière²⁶⁾ vor. Nach Mott ist

$$J_0^2 \sim \frac{m^2 e^4}{4 h^4} \cdot \frac{\lambda^4}{\sin^4 \theta/2}.$$

Eine vollkommene Übereinstimmung dieser Formel mit den experimentellen Ergebnissen konnte nicht festgestellt werden, wie die im größeren Umfange von Ornstein und Mitarbeitern durchgeführten Untersuchungen ergaben¹⁹⁾²⁰⁾. Blackman²⁷⁾ hält die Anwendung der Mott'schen Theorie bei dünnsten Schichten für erlaubt, empfiehlt aber bei größeren Schichtdicken die dynamische Theorie von Bethe²⁸⁾ anzuwenden.

Bei den eigenen Voruntersuchungen konnte eine annähernde Übereinstimmung festgestellt werden. Ähnliches ist bisher wiederholt gefunden worden, zuletzt von Lennander²⁹⁾.

Es erschien daher angebracht, die Mott'sche Streutheorie für die experimentelle Auswertung der Beugungsversuche heranzuziehen.

III. Anwendung der Gasinterferenztheorie auf kristalline Körper

Nach der Gitterinterferenztheorie ist das Auftreten von Interferenzen durch den Strukturfaktor S^2 bestimmt. Zum Beispiel ist danach bei kubisch flächenzentrierten Gittern das Auftreten der 100- und der 110-Interferenzen nicht gestattet. Unterschreiten die Kristallitgrößen aber gewisse Mindestgrenzen, so treten erhebliche Abweichungen von diesen Gesetzmäßigkeiten auf. Wie Abb. 4 zeigt, wird von einer 16 ÅE dicken Goldschicht ein erheblicher Teil der Elektronenstrahlung in die „verbotenen Richtungen“ der 100- und der 110-Interferenzen gestreut. Zur Deutung solcher anomaler Interferenzerscheinungen wurde die von Debye³⁰⁾ und Ehrenfest³¹⁾ begründete Gasinterferenztheorie erstmalig von Germer und White³²⁾ herangezogen. Sie nahmen an, daß die Kleinstkristallite weitgehendst „Flüssigkeitsstruktur“ haben. Unabhängig davon nahm Boersch³³⁾ an, daß bereits in den kleinsten Kristalleinheiten die charakteristische Kristallgitterordnung vorherrscht. Der Unterschied in der Auffassung zeigt sich bei der Berechnung des Strukturfaktors in der Anzahl Summanden, die in der Funktion enthalten sind, und dementsprechend in der Auflösung der Kurven.

Während Boersch die Berechnung der Kurven bis zu Modellgrößen von $2^3 = 8$ Elementarzellen durchführte, wurden für die eigenen Untersuchungen Intensitätsverteilungskurven bis zu $4^3 = 64$ Elementarzellen nach der Formel

$$S^2 = \Phi^2 \sum_i \sum_j \frac{\sin(l_{ij}\hat{x})}{l_{ij}\hat{x}}$$

²⁶⁾ Molière, Z. Naturforschg. **2a** 133 (1947).

²⁷⁾ Blackman, Proc. Roy. Soc. London **173**, 68 (1939).

²⁸⁾ Bethe, Ann. Physik **87**, 55 (1928).

²⁹⁾ Lennander, Ark. Fys. **8**, 551 (1954).

³⁰⁾ Debye, Ann. Physik (4) **46**, 809 (1915).

³¹⁾ Ehrenfest, Akad. Wetensch. Amsterdam **23** (1915).

³²⁾ Germer u. White, Physic. Rev. **60**, 447 (1941).

³³⁾ Boersch, Z. Physik. **119**, 154 (1942).

berechnet. Hierbei ist l_{ij} der mittlere Abstand zwischen den beiden Streuatomen i und j und

$$\hat{\alpha} = 4\pi \frac{\sin \vartheta/2}{\lambda}.$$

Diese Kurven sind für Kristallitmodelle des kubisch-flächen- und raumzentrierten Gitters in den Abb. 2 und 3 wiedergegeben³⁴⁾.

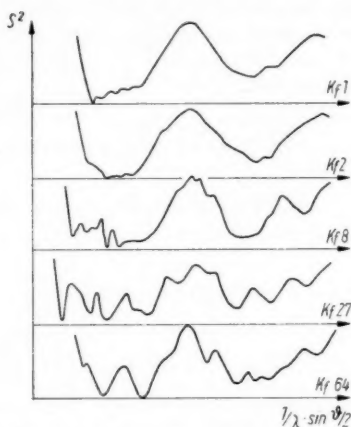


Abb. 2. Strukturfaktorverlauf kubisch-flächenzentrierter Kristalle verschiedener Größen

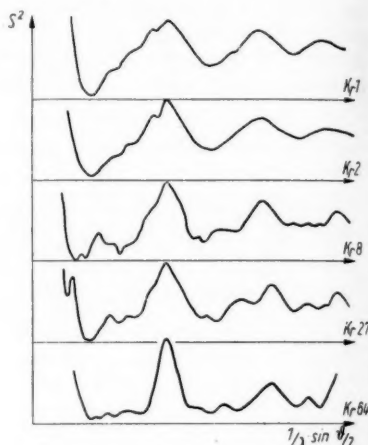


Abb. 3. Strukturfaktorverlauf kubisch-raumzentrierter Kristalle verschiedener Größen

Der Vergleich einer experimentellen Intensitätsverteilungskurve mit einer theoretischen läßt eine leidliche Übereinstimmung im allgemeinen Kurvenverlauf erkennen (Abb. 4). Im einzelnen treten jedoch erhebliche Abweichungen voneinander auf. Vor allem unterscheiden sich die Intensitätsverteilungen in

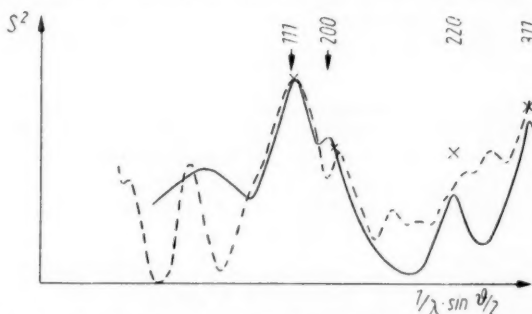


Abb. 4. Vergleich des experimentellen mit dem theoretischen Strukturfaktorverlauf einer Goldaufdampfschicht. Mittlere Kristallitgröße: 16 ÅE. — experimenteller Verlauf — — — theoretischer Verlauf, x Interferenzhöhe nach der Gittertheorie

³⁴⁾ Die Abbildungen sind der Diplomarbeit von P. Midecke, Halle 1952, entnommen.

unmittelbarer Umgebung des Primärstrahls. Die experimentellen Streuintensitäten sind in diesen Gebieten teilweise bedeutend größer als die Theorie es fordert. Daß die gemessenen Interferenzhöhen nicht denen der Gitterinterferenztheorie entsprechen, ist bedingt durch die eingeschränkte Gültigkeit der letzteren bei den geringen Kristallitgrößen. Die unterschiedlichen Ergebnisse der Gasinterferenztheorie und der Experimente dürften auf die den Berechnungen zugrunde gelegten nicht voll gültigen Modellvorstellungen über den strukturellen Aufbau der Streuschichten zurückzuführen sein. Für die Kleinstkristallite, deren Streuvermögen berechnet wurden, sind kubische Trachten angenommen worden. Bei der Kleinheit der Kristallite ist dieses aber wenig wahrscheinlich. Ebenso erscheint es möglich, daß in den dünnsten Schichten neben den kristallinen Anteilen, und zwar zwischen diesen, ungeordnete Bereiche der Atome vorliegen.

Es sollen daher den Berechnungen Modelle zugrunde gelegt werden, die eine Änderung der Kristalltracht im vorgenannten Sinne berücksichtigen.

A. Nach Lennard-Jones und Dent³⁵⁾ sollen bei Kleinstkristalliten in der Oberfläche Spannungen auftreten, die eine Änderung der Gitterkonstanten der äußeren Atomschichten bedingen. Bei Metallen sollen sie zu Gitteraufweitungen führen. Da nach neueren experimentellen Untersuchungen¹¹⁻¹⁴⁾ im Widerspruch hierzu auf eine Gitterkonstantenverkleinerung in der Oberfläche geschlossen wurde, wird daher zunächst die Streuverteilung für ein Modell berechnet, welches diese Verkleinerung berücksichtigt. Bei diesem Modell wird ausgegangen von dem Kristallit mit 64 Elementarzellen ($K, 64$), in dessen Außenschichten Gitterkontraktionen auftreten sollen. Als Kern wird der unveränderte $K, 8$ angenommen. Die Außenschichten sollen aus 56 Elementarzellen bestehen, die eine um 2% kleinere Gitterkonstante haben.

B. Auf Grund der Oberflächenspannungen besteht ebenso die Möglichkeit, daß so ausgezeichnete Lagen wie die Ecken der Kristallite nicht mit Atomen besetzt werden. Wiederum vom $K, 64$ ausgehend, wird angenommen, daß die 8 Eckatom- und die $8 \cdot 3$ flächenzentrierenden Gitterplätze, die in unmittelbarer Nähe der Ecken liegen, nicht besetzt sind. Dadurch entsteht ein Vierzehnflach, der bei Modellen mit einer geringeren Anzahl Atome praktisch mit einer Kugel identisch wird.

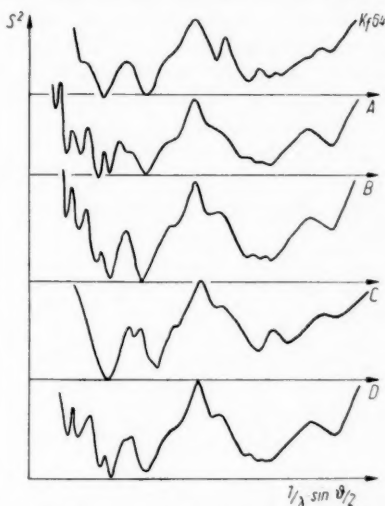


Abb. 5. Streuverteilungskurven verschiedener Kristallitmodelle mit kubisch-flächenzentrierten Gittern. Die Beschreibung der einzelnen Modelle, die den Streukurven A-D zugrunde liegen, ist dem Text zu entnehmen

³⁵⁾ Lennard-Jones und Dent, Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 247 (1928).

C. In der äußeren Atomschicht eingebaute Fremdatome oder andere Umstände können zu einer Gitteraufweitung führen. Es wird daher bei diesem Modell der Vierzehnflach angenommen, der eine Aufweitung der äußersten Gitterschicht von 2% haben soll.

D. Es wird angenommen, der Vierzehnflach habe 2% Kontraktion in der äußersten Schicht.

Die theoretischen Streuverteilungskurven sind für die angegebenen Modelle in Abb. 5 wiedergegeben.

Ähnliche Kurven wurden von Berry¹⁴⁾ für eine Kugel mit 201 und ein Blättchen mit 183 Atomen des kubisch-flächenzentrierten Gitters veröffentlicht.

Bei den experimentellen Untersuchungen werden die theoretischen mit den experimentellen Streukurven verglichen, um Hinweise zu erhalten, welche der diskutierten Kristallitmodelle in den Metallschichten wahrscheinlich vorhanden sein werden.

IV. Experimentelles

Die zu untersuchenden Gold- und Silberschichten wurden durch Verdampfung entsprechender reiner Materialien aus einer Molybdänpfanne im Hochvakuum erzeugt³⁶⁾. Das Eisen wurde von einer Wolframdrahtwendel verdampft³⁷⁾. Kondensiert wurden diese Metaldämpfe auf Trägerfolien, die sich am geeignetsten erwiesen. Diese Folien hatten entweder normale Raum-

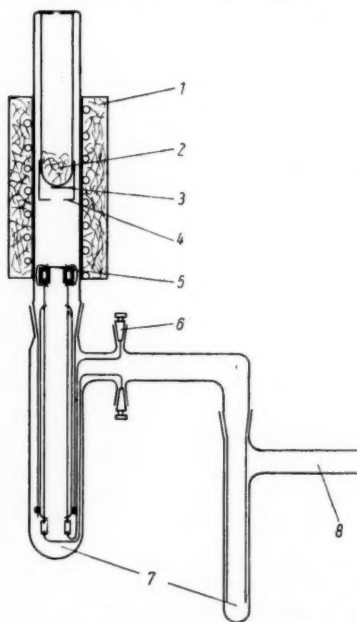


Abb. 6. Schema der verwendeten Aufdampfapparatur

temperatur oder wurden auf einer Temperatur von 78 °K gehalten. Dieses wurde durch ein Vorratsgefäß mit flüssiger Luft erreicht, mit dem sie in wärmeleitender Verbindung standen. In Abb. 6 ist der Aufbau der verwendeten Aufdampfapparatur wiedergegeben. Sie gestattet im Verdampfungsraum Vakua von besser als 10^{-5} Torr zu erreichen, da hinter der letzten Kühlfalle 7 keine Schliffe und Dichtungen mehr eingebaut sind. Der elektrische Heizofen 1 soll die Abgasung der Apparaturteile des Verdampfungsraumes beschleunigen. Damit die Apparatur im schnellen Wechsel immer betriebsbereit ist, sind besondere Stromzuführungen 6 zur Verdampfungs- und Kondensationspfanne 5 notwendig, die im Inneren der Apparatur verlaufen und vor der letzten Kühlfalle nach

³⁶⁾ Zusammenfassende Darstellungen derartiger Verfahren bei H. Mayer, Phys. dünner Schicht. Stuttgart 1950, u. I. Strong, Modern Physical Laboratory Practice, London.

³⁷⁾ Eine Legierungsbildung, die verdampfbare Komponenten geliefert hätte, konnte in keinem Falle festgestellt werden.

außen
auf der
Fe-Blö
einer
als bes
ist, ein
Leucht
platte
Wirku
Für
die, so
Die hie
folie.
schon
bemer
bereich
300 °C

Für
besser
dium v
Festig
pulation
von 1
380 °C
am nä

Als
schicht
wende
von 1,
von 1,
somit
lung d
dampf
herabg
der me

Für
Grada
Grada
lichtop
sensib

Wi
Unters
auf. N
ten W

³⁸⁾
³⁹⁾
⁴⁰⁾

außen durchgeführt sind. Die Folienträger 3 können mit dem Blendenkörper 4 auf den metallischen Kühlstützen 2, der aus einem an Glas angeschmolzenen Fe-Block besteht, aufgesteckt werden. Die Beugungsaufnahmen wurden mit einer von Bethge³⁸⁾ konstruierten EB-Apparatur durchgeführt. Diese hat als besonderes Merkmal neben zwei Strahlblenden, von denen eine auswechselbar ist, eine magnetische Fokussierung, durch die der Strahlquerschnitt auf dem Leuchtschirm $< 0,1$ mm gehalten werden konnte. Weiter ist vor der Photoplatte im Strahlengang eine rotierende Sektorenbende³⁹⁾ angeordnet, deren Wirkungsweise vorhergehend schon beschrieben worden ist.

Für die vorliegenden EB-Untersuchungen wurden Trägerfolien benötigt, die, soweit es möglich war, keine störende Eigenstrukturen aufweisen sollten. Die hierfür am besten geeignete Folie ist die freitragende Siliziummonoxyd-folie. Sie zeigt die geringste Struktur. Erfahrungsgemäß macht sich diese schon bei aufgedampften Metallschichten von etwa 10 Å Dicke nicht mehr bemerkbar. Ihre mechanischen Eigenschaften setzen ihrem Anwendungsbereich enge Grenzen. Ihre Temperaturbeständigkeit reicht bis weit über 300 °C.

Für den praktischen Gebrauch ist die mit SiO bedampfte Kollodiumfolie besser geeignet. Durch Erwärmen auf 200 °C wurde versucht, das Kollodium weitgehendst zu entfernen. Auch diese Folie hat nicht die mechanische Festigkeit der reinen Kollodiumfolie, jedoch ist diese bei vorsichtiger Manipulation ausreichend. Ihre Interferenzstreuung braucht bei Metallschichten von 12 Å Dicke nicht mehr berücksichtigt werden. Da die Folien bis zu 380 °C temperaturbeständig waren, kamen sie den gestellten Anforderungen am nächsten und wurden bei den vorliegenden Untersuchungen benutzt.

Als Ergänzung sei hierzu bemerkt, daß in den Fällen, wo dickere Metallschichten untersucht werden, ohne Bedenken einfache Kollodiumfolien verwendet werden können. Eine 150 Å dicke Kollodiumfolie mit einer Wichte von $1,6 \text{ g/cm}^3$ hat eine Massendicke von $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}$, die einer Goldschicht von 12 Å Dicke entspricht. Bei einer 200 Å dicken Goldschicht beträgt somit der Anteil der durch die Kollodiumfolie gestreuten Elektronenstrahlung etwa 5%. Werden die Kollodiumfolien vor dem Metall mit SiO bedampft, so wird das selektive Streuvermögen der Trägerfolien noch weiter herabgesetzt und kann daher bei dünnsten Aufdampfschichten gegenüber der metallischen Streuung schon vernachlässigt werden.

Für die notwendigen quantitativen Intensitätsmessungen müssen die Gradationen der verwendeten Photoplaten bekannt sein. Die bisherigen Gradationsangaben beruhen auf lichtoptischen Untersuchungen⁴⁰⁾. Für den lichtoptischen Spektralbereich (einigen 1000 Å) sind die Platten auch höchst sensibilisiert.

Wie erwartet, traten bei den experimentellen Untersuchungen sowohl Unterschiede in den Gradationen als auch in den allgemeinen Kurvenverläufen auf. Nachfolgend werden die elektronenoptisch und die lichtoptisch bestimmten Werte wiedergegeben.

³⁸⁾ Bethge, Diplomarbeit Halle 1949.

³⁹⁾ Brauer, Diplomarbeit Halle 1952.

⁴⁰⁾ Agfa-Rezeptbuch.

	γ_E für S	γ_L für S
Elektronenplatten hart	1,58 ⁴¹⁾	2,9
Elektronenplatten rapid	0,775	1,2
Spektral-Blau-Platten Extra hart	1,875	2,56
Schumann-Platten	1,2	>0,75

Der Gegenüberstellung kann entnommen werden, daß die elektronenoptisch gemessenen Gradationswerte rund ein Drittel kleiner sind als die lichtoptisch gemessenen.

V. Untersuchungsergebnisse

Gold

In Abb. 7 ist das typische Beugungsbild einer unterkühlt kondensierten Goldaufdampfschicht wiedergegeben. Die mittlere Teilchengröße in der Aufdampfschicht wurde zunächst mit der von M. v. Laue⁴²⁾ angegebenen Formel



Abb. 7. Beugungsbild einer unterkühlt kondensierten Goldaufdampfschicht

Sie ergab sich zu 14,8 Å bei einer Schichtdicke von etwa 20 Å. Den Strukturfaktorverlauf, der aus der Interferenzstreuung ermittelt wurde, zeigt Abb. 8. Er weist weitgehende Übereinstimmung mit der Kurve D der Abb. 5 auf. Abweichungen treten bei der 220-Reflexion auf, da die experimentelle Intensität kleiner als die nach der Gasinterferenztheorie berechnete gefunden wurde. Gleichfalls ist die experimentelle Streustrahlung in unmittelbarer Umgebung des Primärstrahls bedeutend größer als nach der Gasinterferenztheorie zu erwarten war. Die Differenz der experimentellen und theoretischen Streuerverteilung ergibt eine mögliche zweite

Verteilung mit zwei sehr breiten Maxima. Diesen würden mittlere Koordinationsabstände von etwa 3,4 und 4,7 Å in der Streuschicht entsprechen. Als Ursache hierfür kann angenommen werden, daß neben den Kleinst-

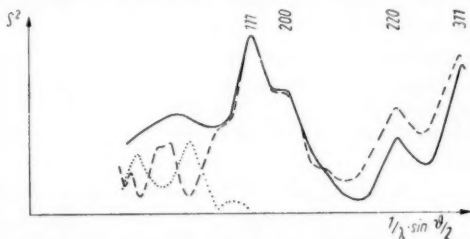


Abb. 8. Vergleich des Strukturfaktorverlaufs einer unterkühlt kondensierten Goldschicht mit der Kurve D der Abb. 5. — Experimenteller Verlauf, --- theoretischer Verlauf, Strukturfaktorverlauf des ungeordneten Anteils

kristalliten noch Anteile wenig bzw. völlig ungeordneter Atome in den Streuschichten vorhanden sind. Sie stellen die Verbindung zwischen den Kristalliten her. Eine mögliche ketten- oder schichtförmige

⁴¹⁾ W. Pawlitschek hat als Mittelwert aus 3 Messungen $\gamma_E = 1,78$ gefunden. Die Entwicklungszeit betrug dabei 12 Minuten.

⁴²⁾ M. v. Laue, Z. Kristalllogr. **64**, 127 (1926).

Anordnung läßt sich nicht nachweisen. Es muß vielmehr angenommen werden, daß die Atome völlig ungeordnet gelagert sind, denn die Koordinationsabstände können entsprechend der Breite des experimentell ermittelten Maximums zwischen 2,8 und 5,3 Å liegen. Möglicherweise existiert daneben noch eine weitere Koordination mit dem Abstand von 2,4 Å.

Der Atomradius von Gold beträgt 1,4 Å⁴³⁾. Der kleinstmögliche Abstand einer Au—Au-Koordination ist somit 2,8 Å. Er würde gerade noch innerhalb der experimentell möglichen Koordinationsabstände liegen. Zur Erklärung des experimentellen Befundes liegt es nahe, die Restgasatome des Stickstoffs und des Sauerstoffs unter der Annahme zu berücksichtigen, daß sie beim Aufdampfvorgang in die Schicht eingetert werden. Stickstoff hat einen Atomradius von 0,8 Å, Sauerstoff einen solchen von 0,68 Å. Als untere Grenze ergeben sich daraus Au—O-Koordinationen mit etwa 2,1 Å Abstand. Die hierdurch bedingte Streustrahlung wird in eine Richtung gebeugt, die zwischen der 111- und der 200-Reflexion der kristallinen Streuung liegt. Da die Streuintensität der Au—O-Koordination auf Grund des geringen atomaren Streuvermögens des Sauerstoffs nur ein Zehntel der Streuintensität einer Au—Au-Koordination beträgt, kann erstere kaum noch nachgewiesen werden. Der mögliche experimentell ausgezeichnete Abstand von 4,7 Å läßt sich durch eine Au—N—Au-Koordination erklären. Hierbei beträgt der Abstand der beiden Au-Atome etwa 4,4 Å. Da eine allzu dichte Lagerung nicht zu erwarten ist, ist das verwaschene „verbotene Maximum“ bei 100 erklärlich. Der von Trendelenburg⁵⁾ früher gefundene scharfe 100-Ring konnte nicht gefunden werden.

Bei einer Kristallitgröße von 22 Å ist der Anteil der „verbotenen Streustrahlung“ schon wesentlich geringer (Abb. 9b), um bei Schichten mit einer mittleren Kristallitgröße von 28 Å fast vollständig verschwunden zu sein (Abb. 9c). Eindeutig kristalline Schichten mit Kristalliten von etwa 100 Å Größe ergeben die wohlbekannten scharfen Beugungsbilder. Die in den „verbotenen Bereich“ gestreute Intensität ist so gering, daß sie nicht mehr von der inkohärenten Streustrahlung zu unterscheiden ist.

Durch eine Zunahme der Anzahl der geordneten Atome in den Schichten ist ein relativer Rückgang der „verbotenen Strahlung“ zu erklären, bei größeren Schichtdicken besteht für die einzelnen Atome eine bessere Möglichkeit, sich vorgebildeten kristallinen Atom- anordnungen anzulagern. Begünstigt wird dieser Anlagerungsprozeß durch eine erhöhte Temperatur der Kondensationsfläche während

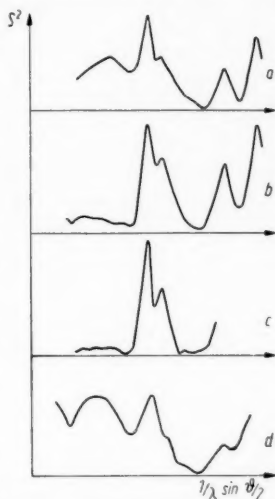


Abb. 9. Experimenteller Strukturfaktorverlauf einer Goldaufdampfschicht mit einer mittleren Teilchengröße von a) 14,8 Å, b) 22 Å, c) 28 Å, d) 14,5 Å, die bei einem Vakuum $>10^{-4}$ Torr aufgedampft wurde

⁴³⁾ Die Werte der Atomradien sind dem Physikalischen Wörterbuch von Westphal entnommen.

des Aufdampfens, wie Kurve *c* in Abb. 9 zeigt, die von einer bei 300 °K kondensierten Goldaufdampfschicht erhalten wurde.

Eine Bestätigung der obigen Überlegungen über den Einbau von Gasatomen in die Metallschicht müßte sich durch eine bei schlechtem Vakuum aufgedampfte Folie erbringen lassen. Diese wäre gekennzeichnet durch eine Zunahme des Anteils der sich im ungeordneten Zustand befindenden Atome, wodurch eine verstärkte Intensität im Bereich der 100-Reflexion auftreten müßte. Dieses konnte experimentell bestätigt werden, wie ein Vergleich der Abb. 9a und 9b ergibt. Die Schicht *d* wurde bei einem Vakuum von etwa $8 \cdot 10^{-3}$ Torr aufgedampft, Schicht *a* bei etwa 10^{-5} Torr. Bemerkenswert ist hier noch, die durch Koordinationsabstände über 4 ÅE bedingte erhebliche Streustrahlung.

Die unelastische Streustrahlung hat bei der Schicht *d* einen viel steileren Verlauf als bei der Schicht *a*.

Silber

Ähnliche Beugungsaufnahmen wie von Gold- wurden auch von Silberaufdampfschichten erhalten.

Danach sind auch in Silberschichten kristallin geordnete und ungeordnete Bereiche nebeneinander vorhanden.

Schichten mit geringer mittlerer Teilchengröße zeigen ebenfalls einen relativ großen Anteil an „verbotener Streustrahlung“ (18 ÅE in Abb. 10a), während Schichten mit großer mittlerer Teilchengröße (~ 50 ÅE in Abb. 10c) fast keine „verbotene Streustrahlung“ mehr aufweisen.

Der allgemeine Kurvenverlauf der Abb. 10a macht es auch beim Silber wahrscheinlich, daß die Kleinstkristallite die Form einer Kugel⁴⁴⁾ oder eines Vierzehnflachs⁴⁵⁾ haben.

Die von Boswell¹²⁾, Berry¹⁴⁾ und Hauk und Krings⁴⁶⁾ beobachtete Gitterkonstantenänderung in dünnen Silberschichten konnte nicht festgestellt werden, da keine Präzisionsmessungen der Gitterkonstanten durchgeführt wurden.

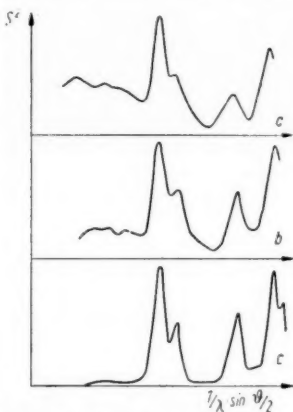


Abb. 10. Experimenteller Strukturfaktorverlauf einer Silberaufdampfschicht mit der mittleren Teilchengröße von a) 18 ÅE, b) 21 ÅE, c) 50 ÅE

Eisen

Als Beispiel für kubisch-raumzentriert kristallisierende Metalle wurden Aufdampfschichten von Eisen untersucht. In Abb. 11 sind die Streuverteilungen von Eisenschichten mit verschiedenen mittleren Kristallitgrößen dem theoretischen Verlauf eines aus 43 Elementarzellen bestehenden Kristalls gegen-

übergestellt. Die Übereinstimmung ist befriedigend. Jedoch zeigen die verschiedenen Eisenschichten ein stark voneinander abweichendes Streu-

⁴⁴⁾ Nach dem theoretischen Kurvenverlauf von Berry¹⁴⁾.

⁴⁵⁾ Nach Kurve *D* in Abb. 5.

⁴⁶⁾ Hauk u. Krings, Naturwiss. 42, 68 (1955).

verhalte
Reflexio
fehlt da
einzelne
schichte
worden.

In d
rung der
und the
verteilu
das dur
sprüngle
flachs en
solche Å
liche Ve
geben h

Ents
zeigten
verhalte
den Sch
mittlere
auch be
„verbot

Da d
densierte
ungeord
handen
Refle
trierten
wurden

Ents
verschie
Die exp
schen de
Streuver
bzw. ein
Grund d

Die I
tischen
nehmend
sitäten“
die gleich
strahlung
nichtkris
Kristalli
ordneten

verhalten. So treten verschiedentlich willkürliche Verschiebungen der einzelnen Reflexionen (c) gegeneinander auf. Im Streuverteilungsverlauf der Schicht d fehlt darüber hinaus die 200-Reflexion fast vollkommen. Das Fehlen von einzelnen Reflexionen bei dünnen Eisenschichten war schon von König⁷⁾ beobachtet worden.

In der Annahme einer möglichen Verbesserung der Übereinstimmung der experimentellen und theoretischen Werte wurde die Streuverteilung eines Kristallitmodells berechnet, das durch Entfernung der Eckatome des ursprünglichen Modells die Form eines Vierzechnflachs erhalten hatte. Es wurde jedoch keine solche Änderung erreicht, welche eine wesentliche Verbesserung der Übereinstimmung ergeben hätte.

Entsprechend den Gold- und Silberschichten zeigten auch dünnste Eisenschichten ein Streuverhalten, welches auf ungeordnete Anteile in den Schichten schließen ließ. Mit ansteigender mittlerer Teilchengröße in den Schichten war auch bei Eisen ein relativer Rückgang der „verbotenen Streustrahlung“ zu beobachten.

Da die Eisenschichten bei etwa 300 °K kondensierten, müssen bei dieser Temperatur noch ungeordnete Anteile in den Schichten vorhanden sein.

Reflexionen, die dem kubisch-flächenzentrierten Gitter zugeordnet werden könnten, wurden in keinem Falle beobachtet.

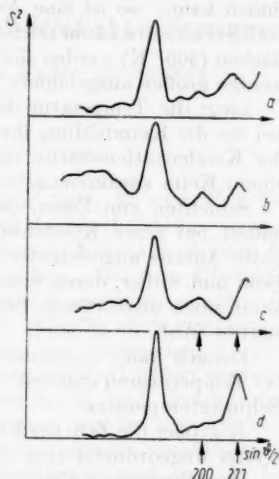


Abb. 11. Experimenteller Strukturfaktorverlauf von Eisenaufdampfschichten mit den mittleren Kristallitgrößen von b) 14 ÅE, c) 16 ÅE, d) 27 ÅE, a) theoretischer Strukturfaktorverlauf eines Kristallitmodells mit 64 Elementarzellen;

VI. Zusammenfassung

Entsprechend der Aufgabenstellung wurden zunächst die Streuverteilungen verschiedener Kristallitmodelle nach der Gasinterferenztheorie durchgerechnet. Die experimentellen Untersuchungen ergaben gute Übereinstimmung zwischen den Streuverteilungen dünnster Metallschichten und den theoretischen Streuverteilungen von Kristalliten, welche die Form eines Vierzechnflachs bzw. einer Kugel haben. Zwischen diesen beiden Kristalltrachten kann auf Grund der Ähnlichkeit nicht unterschieden werden.

Die Intensitäten der „verbotenen Streustrahlungen“ zeigen einen systematischen Gang mit den mittleren Kristallitgrößen in den Schichten. Mit abnehmender Kristallitgröße nehmen die relativen „verbotenen Streuintensitäten“ zu und erreichen bei einer mittleren Kristallitgröße von etwa 15 ÅE die gleichen Höhen wie die (111)-Interferenzen. Diese „verbotenen Streustrahlungen“ ergeben sich aus der Beugung der Elektronenstrahlen durch nichtkristallin geordnete Atome in den Schichten. Je kleiner die mittlere Kristallitgröße ist, um so relativ größer ist der Anteil der nichtkristallin geordneten Atome. Dieser kann sowohl aus Metallatomen als auch aus einge-

getteten Atomen des Restgases bestehen und ist abhängig von der Temperatur der Kondensationsfläche.

Befindet sich die Kondensationsfläche auf einer Temperatur, die unter derjenigen liegt, bei der noch eine merkliche Oberflächenwanderung stattfinden kann, so ist eine Ausbildung von Kristallflächen im Sinne Kossels und Stranskis kaum noch möglich. Auf tiefer temperierten Kondensationsflächen (300 °K) werden sich daher in der Mehrzahl kleine Kristallite und nur wenige größer ausgebildete befinden (Abb. 9c und 10c).

Liegt die Temperatur der Kondensationsfläche (80 °K) unter derjenigen, bei der die Keimbildung ihr Maximum hat, so werden absorbierte Atome auf der Kondensationsfläche vorhanden sein, die nicht mit anderen Atomen zu einem Keim zusammengetreten sind (Abb. 8 und 10a).

Schichten von Eisen, dessen Schmelzpunkt bei etwa 1820 °K liegt, erhalten bei einer Kondensationstemperatur von etwa 300 °K noch relativ große Anteile ungeordneter Atome (Abb. 11). Dagegen sind in Schichten von Gold und Silber, deren Schmelzpunkte bei etwa 1340 °K und 1240 °K liegen, kaum noch ungeordnete Bereiche nachweisbar, wenn sie bei 300 °K kondensierten (Abb. 9c u. 10c).

Danach kann angenommen werden, daß die ungeordneten Bereiche noch bei Temperaturen existent sind, deren obere Grenzen in Beziehung stehen zur Schmelztemperatur.

Je größer die Zahl der Fremdatomeinlagerungen in den Schichten ist, um so relativ ungeordneter sind diese (Abb. 9d).

Der allgemeinen Kurvenverlauf läßt es möglich erscheinen, daß die Fremdatome hauptsächlich zwischen den Kleinstkristalliten angeordnet sind. Ein Hinweis auf Einlagerungen in den Kristalliten konnte bei Gold und Silber nicht gefunden werden. Bei Eisen kann es möglicherweise eine Erklärung für die gefundenen Interferenzverschiebungen bzw. für das Nichtauftreten von Interferenzen sein.

Den Herren Prof. Dr. Messerschmidt und Dr. Bethge möchte ich für ihre großzügige Unterstützung und ihr stets hilfsberechtigtes Interesse auch an dieser Stelle herzlichst danken.

Dortmund-Aplerbeck, Böcklerstr. 8

Bei der Redaktion eingegangen am 13. Mai 1959.

Hal-

Mes
25 % N
auch o
werden
von de
und R_1
ähnlich
Punkt
bei run
Widers
zentrie
 R_1/e^2 m
83 % N
annähe
Spannu
negativ
wurde
Effekt
Minimu
negativ
unstetig
 α -Phase
100% l
halb 50
dann la
wiegen
wiegen

Die
wird in
Katione
Für
die Zah
Außene

Hall-Effekt und Leitfähigkeit der Eisen-Nickel-Legierungen

II Von Werner Jellinghaus und Miguel-Pedro de Andrés

Mit 9 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Messungen bei 20 °C an Legierungen zwischen 100% Fe und 75% Fe. 25% Ni ergaben im magnetisierungsabhängigen Teil der Hall-Feldkurven und auch oberhalb der Sättigung positive Hall-Konstanten. Sowohl R_1 als auch R_0 werden durch Zusatz von Nickel zu Eisen vergrößert. Bei dem Übergang von den raumzentrierten zu den flächenzentrierten Legierungen steigen R_1 und R_0 sprunghaft an, werden jedoch oberhalb 33% Ni stark verkleinert ähnlich wie der spezifische Widerstand, welcher mit steigendem Curie-Punkt der Legierungen abnimmt. Der außerordentliche Hall-Effekt wechselt bei rund 83% Ni das Vorzeichen. Hall-Konstante R_1 und Quadrat des Widerstands laufen sowohl bei den raumzentrierten wie bei den flächenzentrierten Legierungen weitgehend parallel; jedoch sinkt die Verhältniszahl R_1/ϱ^2 mit abnehmendem Eisengehalt. Der Vorzeichenwechsel von R_1 bei 83% Ni läßt eine Verknüpfung mit der Magnetostriktion vermuten, welche bei annähernd der gleichen Konzentration das Vorzeichen wechselt. Elastische Spannungen in Stromrichtung verschieben die Hall-Konstante R_1 in der negativen Richtung. Bei der Würfelfaktur der Legierung 50% Fe 50% Ni wurde eine Anisotropie des Hall-Effekts gefunden. Der ordentliche Hall-Effekt sinkt bei rund 52 Gew.-% (50 Atom-% Ni) auf Null, durchläuft ein Minimum bei rund 66% Ni und steigt dann langsam zu dem immer noch negativen R_0 -Wert des reinen Nickels an. In der Funktion R_0/ϱ^2 sind die unstetigen Eigenschaftsänderungen beim Wechsel der Kristallgitter von der α -Phase zur γ -Phase kompensiert. Die Funktion $M = R_0/\varrho^2$ verläuft zwischen 100% Fe und 50 Atom-% Ni bei positiven Werten hyperbelähnlich. Oberhalb 50 Atom-% Ni sind alle Werte negativ; die Funktion sinkt erst schneller, dann langsamer bis zum reinen Nickel. Der Kurvenverlauf läßt auf überwiegende Löcherleitung zwischen 100% Fe und 50 Atom-% Ni und auf überwiegende Elektronenleitung im nickelreichen Teil schließen.

Einführung und Aufgabe

Die Zahl der an der Elektrizitätsleitung beteiligten Elektronen eines Metalls wird in der Chemie mit der Zahl der Valenzelektronen, die bei der Bildung von Kationen abgegeben werden, gleichgesetzt.

Für die Elemente mit einfachem Atombau, z. B. für die Alkalimetalle ist die Zahl der Valenzelektronen, die das Metall abgeben kann und die Zahl der Außenelektronen, die einer noch nicht völlig besetzten Elektronenschale ange-

hören, die gleiche. Man kann diese Zahl aus der Hall-Konstante des Metalls errechnen.

$$R = - \frac{A}{n \cdot e \cdot N_L D} \quad (1)$$

R Hall-Konstante; A Atomgewicht; n Elektronen/Atom; e Elementarladung; N_L Loschmidt-Zahl; D Dichte.

Messungen der Hall-Konstante in Alkalimetallen und auch den einwertigen Edelmetallen ergaben Zahlenwerte im Betrage von annähernd 1 Elektron je Atom.

Während bei den Elektrolyten das Leitvermögen sowohl von der Dichte der negativen als auch der positiven Ladungsträger und ihren Beweglichkeiten bestimmt wird, ist bei den typischen Metallen, z. B. bei den bereits genannten Alkalimetallen die Beweglichkeit der positiven Ladungsträger zu vernachlässigen. Die Hall-Konstante besitzt bei den meisten Metallen negatives Vorzeichen. Unter den Übergangsmetallen der dritten, vierten und fünften Periode des Systems finden sich dagegen einige Elemente mit positivem Hall-Effekt¹⁾: Cr, Fe, Ru, Rh, Re und Ir. Bei diesen Elementen ist die 3*d*-Schale (Cr und Fe), die 4*d*-Schale (Ru und Rh) oder die 5*d*-Schale (Re und Ir) nicht vollständig besetzt; die nächst höheren Schalen (4*s*, 5*s* oder 6*s*) sind aber teilweise besetzt. Die Elemente Ni, Pd und Pt könnten nach ihren Ordnungszahlen die 3*d*-, die 4*d*- oder die 5*d*-Schale gerade noch voll besetzen, unter der Bedingung, daß die 4*s*-, 5*s*- oder 6*s*-Schale leer bleibt. Die drei Elemente Ni, Pd und Pt haben wie ihre einwertigen Nachbarn Cu, Ag und Au einen negativen Effekt. Bei Rhodium mit der Ordnungszahl 45 kann die 4*d*-Schale nicht mehr vollständig besetzt werden; die Hall-Konstante ist positiv. Die Hall-Konstante von Ruthenium mit der Ordnungszahl 44, also mit einer noch kleineren Zahl von Elektronen, ist positiv und größer als die von Rhodium. Sowohl das Auftreten des Hall-Effekts mit positiven Vorzeichen als auch der an den Elementen mit unvollständig besetzter 3*d*-Schale beobachtete Ferromagnetismus zwingen dazu, neben der normalen Elektronenleitung noch einen zweiten als Löcherleitung bezeichneten Leitungsmechanismus anzunehmen.

Im System Eisen—Nickel besteht die Möglichkeit, den Übergang von einem Metall mit nahezu vollbesetzter 3*d*-Schale und negativem Hall-Effekt (Ni) zu einem Metall mit positivem Hall-Effekt, einer um 2 Einheiten kleineren Ordnungszahl und einer entsprechend schwächer besetzten 3*d*-Schale in einer ausgedehnten Mischkristallreihe zu verfolgen. Genauer genommen besteht allerdings die ununterbrochene Mischkristallreihe nur oberhalb 910 °C; denn bei Raumtemperatur sind die eisenreichen Legierungen bis nahe an 30% Ni raumzentriert oder gemischt aus raumzentrierter und flächenzentrierter Phase.

Im folgenden wird über den Hall-Effekt und den Leitungsmechanismus in der Legierungsreihe Eisen—Nickel berichtet. Es war das Ziel der Arbeit, den Übergang vom positiven Hall-Effekt des Eisens zum negativen Hall-Effekt des Nickels durch die Mischkristallreihe hindurch zu verfolgen, den Einfluß der zwei Kristallgitter auf Hall-Effekt und Leitfähigkeit zu ermitteln und schließlich noch einige Beobachtungen über die Beziehungen des

¹⁾ P. O. Gehlhoff, E. Justi u. M. Kohler, Z. Naturforschung **5a**, 16 (1950).

außerordentlichen Hall-Effekts, d. h. des von der Magnetisierung abhängigen Teils zu dem elektrischen Widerstand, zur Kristallanisotropie und zur Magnetostriktion zu sammeln.

Definitionen

In der vorliegenden Arbeit wird die Konstante R_0 des ordentlichen Hall-Effekts in dem üblichen Sinne gebraucht; R_0 ist die Neigung der Kurve, die das auf die Stromdichte 1 A/cm^2 normierte Hall-Feld in Abhängigkeit von der Induktion B für B -Werte oberhalb der Sättigung angibt. Der Verlauf des Hall-Feldes unterhalb der Sättigung wird durch die Neigung des geradlinigen Anfangsteils der Hall-Feldkurve gekennzeichnet; diese Neigung wird als Konstante R_1 des außerordentlichen Hall-Feldes bezeichnet.

Neben dieser Definition finden sich in der Literatur noch andere Definitionen für die Konstante R_1 des außerordentlichen Hall-Effekts. Nach E. Pugh²⁾ ist das Hall-Feld eine Summe von 2 Gliedern:

$$E = R_0 \cdot H + R_1 M. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet M die Magnetisierung. Die Summe von H und M ist gleich der Induktion B ; oder in herkömmlicher Schreibweise: $B = H + 4\pi J$. Die bisher bekannten Versuchsanordnungen zur Messung des Hall-Effekts der Ferromagnetica geben aber keine Möglichkeit, die gemessene Größe B in die Teile H und M zu zerlegen. Da bei den üblichen in Oberflächennormalenrichtung magnetisierten Proben der Entmagnetisierungsfaktor etwa gleich 4π ist, wird unterhalb der Sättigung H für gewöhnlich als klein angesehen. In diesen Fällen kann das Glied $R_0 \cdot H$ gegenüber $R_1 \cdot M$ vernachlässigt werden. Es tritt jedoch oberhalb der Sättigung bei der Berechnung der Hallspannung aus vorbekannten Werten von R_0 und R_1 eine Schwierigkeit auf, denn man benötigt, um die Formel von Pugh anzuwenden, die Sättigungsmagnetisierung $4\pi J_s$. Die Formel von Pugh müßte in folgender Art geschrieben werden:

$$E = R_0 (B - 4\pi J_s) + R_1 \cdot 4\pi J_s. \quad (3)$$

Hieraus entsteht die Gleichung

$$E = R_0 B + (R_1 - R_0) \cdot 4\pi J_s. \quad (4)$$

J. Smit³⁾ benutzt an Stelle dieser Gleichung die vereinfachte Schreibweise

$$E = R_0 B + R_s \cdot 4\pi J \quad (5)$$

mit $R_s = R_1 - R_0$.

Für die Ermittlung der ordentlichen Hall-Konstante R_0 sind diese Unterschiede in der Definition des außerordentlichen Hall-Effekts bedeutungslos, weil man R_0 aus einem Differenzenquotienten ermittelt:

$$R_0 = \frac{E_{B_1} - E_{B_2}}{B_1 - B_2}.$$

²⁾ E. M. Pugh, Rev. mod. Physics **25**, 151 (1953).

³⁾ J. Smit, Physica **21**, 877 (1955).

Hierbei ist nur vorausgesetzt, daß B_1 und B_2 beide größer als die Sättigung sind.

Bei dem außerordentlichen Hall-Effekt ist der theoretische Unterschied zwischen R_1 und R_0 häufig praktisch zu vernachlässigen; dies gilt, wenn $|R_1| \gg |R_0|$. In der Legierungsreihe Eisen-Nickel treten jedoch Fälle auf, in denen R_1 und R_0 von gleicher Größenordnung sind. Hier muß der Unterschied der Definitionen berücksichtigt werden. Da bisher keine Möglichkeit besteht, zu entscheiden, ob unterhalb der Sättigung der ordentliche Hall-Effekt mit der oberhalb der Sättigung gültigen Konstante R_0 richtig beschrieben wird oder nicht, haben wir für den außerordentlichen Hall-Effekt die einfachere Beschreibung mittels der Konstante R_1 vorgezogen.

Versuchswerkstoffe und Meßverfahren

Für diese Untersuchung wurden vorwiegend Sinterlegierungen verwandt, welche aus Carbonyleisen- und Carbonylnickel-Pulver hergestellt waren. Die Kohlenstoff-, Silizium- und Mangangehalte liegen meist unter 0,01%. Einige geschmolzene Legierungen dagegen enthielten einige Hundertstel bis zu einem Zehntel % Si und Mn-Gehalte in ähnlicher Größe. Die Versuchswerkstoffe wurden bis auf 3 mm Stärke warm und weiter mit Zwischenglühungen bis auf etwa 0,3 mm kalt gewalzt. Durch Schlußglühungen in Wasserstoff (2 h bei 1150 °C) wurde einerseits der Kohlenstoffgehalt stark vermindert, und andererseits die vom Walzen her dem Werkstoff noch anhaftenden mechanischen Spannungen beseitigt. Für die Messungen wurden rechteckige Streifen von 15 mm Breite und 150 mm Länge geschnitten. Die Blechdicken wurden aus dem Gewicht der Streifen, der Länge, der Breite und der Dichte errechnet. Technische Legierungen erwiesen sich wegen der schwer übersehbaren Wirkung der Begleitelemente Si, Cu, Cr, Mn usw. als ungeeignet.

Für die Hall-Effekt-Messungen stand ein Elektromagnet in Doppeljochform mit Weicheisenpolkernen von 100 mm Durchmesser und Kobalt-eisenpolschuhen zur Verfügung; die Luftspaltbreite beträgt 5 mm, der Polschuhdurchmesser 35 mm. Die Feldstärkenkonstanz innerhalb eines Bereichs von 15 mm Durchmesser um die Polkernachse herum war besser als 0,5%. Der Elektromagnet gab im linearen Anfangsteil der Kennlinie etwa 15000 Oersted/Ampere und im Sättigungsgebiet mit 5,3 A, rund 30000 Oersted. Durch Führungen aus Kunststoff war einerseits der rechte Winkel zwischen den Längskanten der Probe, d. h. der Stromrichtung und der Verbindungslinie der Hall-Spannungsabgriffe gesichert; andererseits war eine Biegung der Probenenden durch den magnetischen Streufluß verhindert. Die Messungen wurden bei Raumtemperatur im Gleichfeld bei Stromdichten von rund 20 A/cm² ausgeführt; die Hall-Spannungen wurden zwischen 2 an die Probe angeordneten Spitzen aus einer Kupfer-Beryllium-Legierung mit 10 mm Abstand abgenommen und mit einem Spiegelgalvanometer von der Empfindlichkeit 10⁻⁷ Volt/Sktl gemessen.

Zur Bestimmung des elektrischen Widerstands wurden die gleichen Proben wie für die Hall-Effekt-Messungen benutzt. Als Spannungsabgriff diente eine Kunststoffleiste mit eingelassenen Hartmetallkugeln von 1 mm Durchmesser; gemessen wurde mit einer Thomson-Brücke und einem Normalwiderstand.

Verlauf der Hall-Feldkurven in der Legierungsreihe Eisen-Nickel

Die Mischungslücke zwischen den raumzentrierten eisenreichen und den flächenzentrierten nickelreichen Mischkristallen umspannt unter Gleichgewichtsbedingungen etwa 30%. Um den Einfluß des Kristallgitters möglichst deutlich zu sehen, wurden durch Abschrecken und Tiefkühlen stark übersättigte α -Mischkristalle hergestellt und dadurch die Mischungslücke auf den Bereich zwischen 25 und 30% Ni eingeschränkt. Um die inneren Spannungen tunlichst zu beseitigen, wurde nach der Tiefkühlung kurzzeitig unter der A_3 -Temperatur geglüht.

Bei den ferromagnetischen Metallen ist häufig der von der Magnetisierung abhängige Teil des Hall-Effekts vielfach größer als der ordentliche Hall-Effekt⁴⁾. Dies trifft auch für Eisen⁵⁾ und die Mehrzahl der Eisen-Nickel-Legierungen zu.

Abb. 1 soll zunächst nur die Größenordnungen zeigen, in denen sich der Hall-Effekt der Eisen-Nickel-Legierungen bewegt. Bei einer Stromdichte von 1 A/cm^2 beträgt das Hall-Feld bei gerade erreichter Sättigung von reinem Eisen $9 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{cm/A}$, der größte positive Wert beträgt dagegen etwa $250 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{cm/A}$; der größte Betrag mit negativen Vorzeichen beträgt etwa $-5 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{cm/A}$; vgl. auch Tab. 1.

In Abb. 1 ist der Höchstbetrag des außerordentlichen Hall-Effekts angegeben. Man erhält diese häufig als Hall-Widerstand R_H , bezeichnete Größe durch Extrapolation der Hall-Feldkurve aus dem Sättigungsgebiet auf die Induktion Null. Bei höheren Magnetfeldern kommen

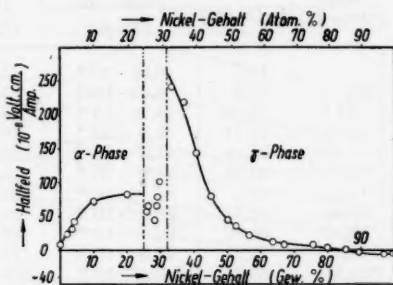


Abb. 1. Hall-Widerstand der gesättigten Legierungen in Abhängigkeit vom Nickel-Gehalt

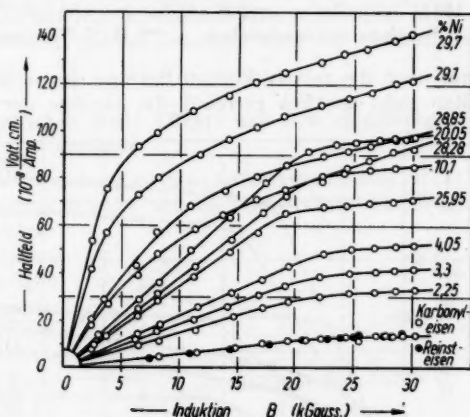


Abb. 2. Eisen-Nickel-Legierungen: Hall-Feldkurven von 0 bis 29,7% Ni

⁴⁾ Vgl. J. P. Jan in Solid State Physics, herausgegeben von F. Seitz u. D. Turnbull, Bd. 5 Galvanomagnetic and thermomagnetic Effects in Metals, S. 3/96, Acad. Press Inc., New York 1957.

⁵⁾ W. Jellinghaus u. M. P. de Andrés, Archiv Eisenhw. 27, 187 (1956).

⁶⁾ S. Foner u. E. M. Pugh, Physic. Rev. 91, 20 (1953).

Tabelle 1
Elektrischer Widerstand, Hall-Widerstand** und Hall-Konstante der Eisen-Nickel-Legierungen

Nickel-Gehalt (Atom-%)	ϱ ($\mu\Omega \cdot \text{cm}$)	ϱ_{H_1} (Volt \cdot cm) (Amp.)	R_1 (Volt \cdot cm) (Amp. Gauß)	R_0 (Volt \cdot cm) (Amp. Gauß)	M ($\frac{\text{cm}^2}{\text{Volt} \cdot \text{sec}}$) ²
—	10,5	$8,92 \cdot 10^{-8}$	$5,83 \cdot 10^{-12}$	$1,41 \cdot 10^{-12}$	91,35
*	10,7	$8,51 \cdot 10^{-8}$	$5,48 \cdot 10^{-12}$	$1,87 \cdot 10^{-12}$	116,5
2,14	16,33	$24,7 \cdot 10^{-8}$	$14,75 \cdot 10^{-12}$	$2,62 \cdot 10^{-12}$	70,25
3,16	18,74	$32,5 \cdot 10^{-8}$	$18,55 \cdot 10^{-12}$	$3,03 \cdot 10^{-12}$	61,5
3,86	21,18	$41,2 \cdot 10^{-8}$	$22,00 \cdot 10^{-12}$	$3,34 \cdot 10^{-12}$	53,1
*9,65	30,66	$71,9 \cdot 10^{-8}$	$38,10 \cdot 10^{-12}$	$4,42 \cdot 10^{-12}$	33,5
*19,26	35,4	$83,1 \cdot 10^{-8}$	$44,90 \cdot 10^{-12}$	$4,53 \cdot 10^{-12}$	25,8
25,00	32,64	$58,0 \cdot 10^{-8}$	$34,80 \cdot 10^{-12}$	$5,45 \cdot 10^{-12}$	36,45
27,82	68,20	$65,4 \cdot 10^{-8}$	$89,65 \cdot 10^{-12}$	$13,15 \cdot 10^{-12}$	20,15
*28,05	75,9	$78,8 \cdot 10^{-8}$	$182,0 \cdot 10^{-12}$	$14,14 \cdot 10^{-12}$	15,8
*32,31	83,2	$240,5 \cdot 10^{-8}$	$234,1 \cdot 10^{-12}$	$9,35 \cdot 10^{-12}$	9,61
39,55	55,9	$142,6 \cdot 10^{-8}$	$94,9 \cdot 10^{-12}$	$5,20 \cdot 10^{-12}$	11,86
43,50	43,4	$79,5 \cdot 10^{-8}$	$53,1 \cdot 10^{-12}$	$1,92 \cdot 10^{-12}$	7,24
49,25	35,21	$45,5 \cdot 10^{-8}$	$30,5 \cdot 10^{-12}$	$0,53 \cdot 10^{-12}$	3,04
51,29	32,92	$36,3 \cdot 10^{-8}$	$24,4 \cdot 10^{-12}$	$-0,91 \cdot 10^{-12}$	-5,96
55,39	25,63	$22,6 \cdot 10^{-8}$	$11,85 \cdot 10^{-12}$	$-2,05 \cdot 10^{-12}$	-22,25
62,54	19,9	$13,0 \cdot 10^{-8}$	$6,69 \cdot 10^{-12}$	$-2,41 \cdot 10^{-12}$	-43,4
66,30	17,8	$8,4 \cdot 10^{-8}$	$4,22 \cdot 10^{-12}$	$-2,13 \cdot 10^{-12}$	-47,8
*74,68	19,5	$8,2 \cdot 10^{-8}$	$4,64 \cdot 10^{-12}$	$-2,11 \cdot 10^{-12}$	-39,6
79,10	14,8	$4,51 \cdot 10^{-8}$	$1,34 \cdot 10^{-12}$	$-2,06 \cdot 10^{-12}$	-67,1
84,77	13,7	$1,45 \cdot 10^{-8}$	$-0,51 \cdot 10^{-12}$	$-1,71 \cdot 10^{-12}$	-65,0
88,65	13,0	$-1,31 \cdot 10^{-8}$	$-3,66 \cdot 10^{-12}$	$-1,64 \cdot 10^{-12}$	-69,1
96,74	9,82	$-5,07 \cdot 10^{-8}$	$-8,35 \cdot 10^{-12}$	$-0,91 \cdot 10^{-12}$	-67,3
100	7,4	$-2,99 \cdot 10^{-8}$	$-4,96 \cdot 10^{-12}$	$-0,62 \cdot 10^{-12}$	-80,6

* Laboratoriumsschmelzen.

** Hall-Widerstand $\varrho_{H_1} = R_1 \cdot 4 \pi J_1$.

nur noch die relativ kleinen Beträge des ordentlichen Hall-Effekts hinzu. Man sieht deutlich getrennt die Gruppe der raumzentrierten und die der

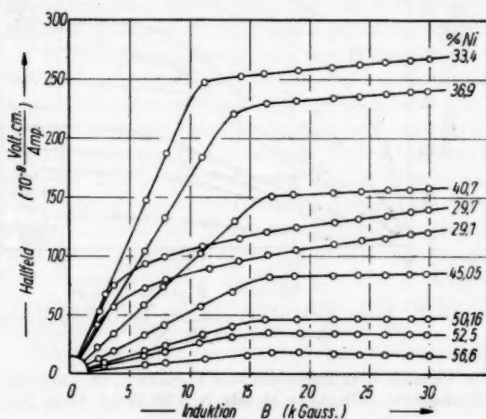


Abb. 3. Eisen-Nickel-Legierungen: Hall-Feldkurven von 29,1 bis 56,6% Ni

flächenzentrierten Legierungen. An der Eisenseite steigt der Hall-Widerstand mit dem Nickelzusatz erst schneller, dann langsamer an. Im Gebiet der flächenzentrierten γ -Phase sind die Hall-Widerstände zunächst sehr groß; sie fallen zwischen 30 und 60% Ni stark ab, nähern sich der Null und sind oberhalb 83% negativ. Bekanntlich liegt der Curie-Punkt bei 30% Ni in der Nähe von $+100^\circ\text{C}$ und steigt mit wachsendem Nickel-Gehalt an,

Jellingh

währen
wegt.
temper
Nickel
nämlich
Widers
außer
Effekt
an die
ratur.
Eim
sichtlich
zwischen
magnet
außer
Effekt
nicht z
Abb. 2
3 Legie
Zusamm
stäbe b
Zustand
kurve o
ist der
der Leg
bei höh
Effekt
Hall-E

Verk

Nac
Effekt
der Ha
In der
nur M
Temper
anderer
Metalle
ausged
peratur
Legieru
daher
starke
 R_1 zu
bisher

7) J.

8) J.

Ann.

während der spezifische Widerstand sich in entgegengesetzter Richtung bewegt. Wir beobachten hier an einer Legierungsreihe bei konstanter Meßtemperatur etwa das, was J. P. Jan⁷⁾ an Eisen und J. Smit⁸⁾ an reinem Nickel beobachtet haben, nämlich Vergrößerung des Widerstands und des außerordentlichen Hall-Effekts bei Annäherung an die Curie-Temperatur.

Eine unmittelbar ersichtliche Verknüpfung zwischen der Sättigungsmagnetisierung und dem außerordentlichen Hall-Effekt ist aus Abb. 1 nicht zu entnehmen. Die Abb. 2 bis 4 zeigen für 3 Legierungsgruppen den Zusammenhang zwischen Hall-Feld und Induktion; ungleiche Ordinatenmaßstäbe beachten! Der Übergang vom ungesättigten zum magnetisch gesättigten Zustand ist bei den meisten Legierungen an einem Knick der Hall-Feldkurve deutlich zu erkennen. Nur bei Nickel-Gehalten zwischen 28 und 30% ist der Übergang stark verschmiert entsprechend dem 2phasigen Charakter der Legierungen. Bei 52% Ni (etwa 50 Atom-%) verläuft die Hall-Feldkurve bei höheren Induktionen parallel zur Induktionsachse; der ordentliche Hall-Effekt ist Null. Bei noch höheren Nickel-Gehalten wird der ordentliche Hall-Effekt negativ.

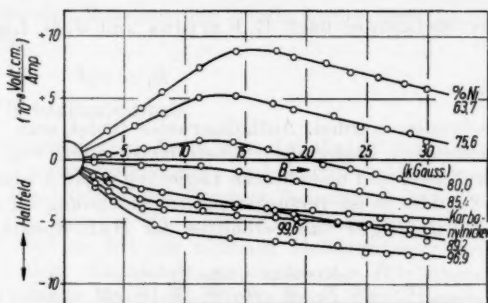


Abb. 4. Eisen-Nickel-Legierungen: Hall-Feldkurven von 63,7 bis 100% Ni

Verknüpfung des außerordentlichen Hall-Effekts mit dem spezifischen Widerstand

Nach den oben gezeigten Beziehungen des außerordentlichen Hall-Effekts zu den Curie-Punkten liegt es nahe, auf die Temperaturabhängigkeit der Hall-Konstante R_1 zu achten. In der vorliegenden Arbeit sind zwar nur Messungen bei einer einzigen Temperatur ausgeführt worden; andererseits liegen aber für die reinen Metalle Eisen und Nickel bereits ausgedeutete Messungen der Temperaturabhängigkeit vor³⁾). Für die Legierungen der beiden Metalle ist daher auch ohne Messungen eine starke Temperaturabhängigkeit von R_1 zu erwarten. Im Schrifttum ist bisher vorwiegend von der Ver-

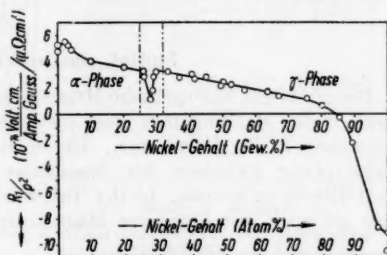


Abb. 5. Verhältnis R_1/ρ^2 als Funktion des Nickelgehalts

⁷⁾ J. P. Jan, *Helv. phys. Acta* **25**, 677 (1952).

⁸⁾ J. P. Jan u. H. M. Gijsman, *Physica* **18**, 339 (1952).

knüpfung der Hall-Konstante R_1 mit dem ebenfalls starken temperaturabhängigen Widerstand gesprochen worden⁹⁾. Die Beziehung kann allgemein durch

$$R_1 = c \cdot \varrho^n, \quad n \sim 2 \quad (6)$$

oder bestimmter nach R. Karplus und J. M. Luttinger¹⁰⁾¹¹⁾ mit

$$R_1 = c \varrho^2 \quad (7)$$

geschrieben werden. Auffälligerweise findet man jedoch nur bei Eisen und eisenreichen Legierungen einen Exponenten von annähernd dem Betrag 2. Für Nickel und nickelreiche Legierungen ist n wesentlich kleiner.

In Abb. 5 ist versuchsweise in Anlehnung an die Formel von Karplus und Luttinger das Verhältnis der Hall-Konstante R_1 zum Quadrat des

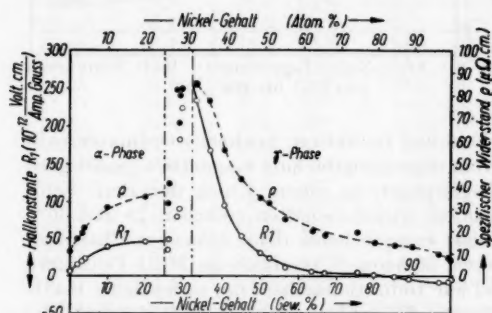


Abb. 6. Hall-Konstante R_1 und spezifischer Widerstand der Eisen-Nickel-Legierungen

spezifischen Widerstands als Funktion des Nickel-Gehaltes aufgezeichnet worden. Nach Abb. 6 ist die Hall-Konstante R_1 bei Nickel-Gehalten zwischen 75 und 100% verhältnismäßig klein. Wenn man diesen Bereich außer Betracht läßt, so ergibt sich für den übrigen Bereich von 100 bis 25% Fe eine einfache Beziehung: Das Verhältnis R_1/ϱ^2 sinkt mit abnehmendem Eisen-gehalt proportional dem

Einfluß elastischer Spannungen

Bei rund 82% Ni¹²⁾ geht die Magnetostriktion der Eisen-Nickel-Legierungen durch Null. Bei ungefähr dem gleichen Punkte wechselt auch die Hall-Konstante R_1 ihr Vorzeichen. Dieser Befund gab Veranlassung, nach einer Verknüpfung zwischen der Magnetostriktion und dem außerordentlichen Hall-Effekt zu suchen. In der Tat wurde sowohl bei Legierungen mit positiver als auch mit negativer Magnetostriktion ein Einfluß einer elastischen

⁹⁾ A. I. Schindler u. E. I. Salkowitz, Physic. Rev. **99**, 1251 (1955).

¹⁰⁾ R. Karplus u. J. M. Luttinger, Physic. Rev. **95**, 1154 (1954).

¹¹⁾ C. Kooi, Physic. Rev. **95**, 883 (1954).

¹²⁾ Y. Masiyama, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. **20**, 574 (1931).

Jellingha

Zugspan
Richtung
Konstan
verschob
parallel
geeignet

Die
Ferro
Teil lä
aufweist
Spannu
streifen
schwer
selbst a
stallanis
ein sehr
gebildet
Richtung
Würfelk
und ent
stallanis
Hall-E
dem ord

Der
fische V
formung
bei der
neten A
(H₂) Of
Nach A
(75% N
Hall-E
mung
nete At
er ver
Hall-E
derte si
nur wen

¹³⁾ W
¹⁴⁾ W
Ferro
¹⁵⁾ E

Zugspannung nachgewiesen¹³⁾14). In beiden Fällen wird durch eine in der Richtung des elektrischen Stroms angreifende Zugspannung die Hall-Konstante R_1 proportional der elastischen Spannung zu negativeren Beträgen verschoben. Für eine Messung des Hall-Effekts unter dem Einfluß einer parallel zum Magnetfeld wirkenden Zugspannung wurde bisher noch keine geeignete Anordnung gefunden.

Kristallanisotropie

Die von E. M. Pugh¹⁵⁾ vorgeschlagene Aufteilung des Hall-Effekts der Ferromagnetica in einen magnetisierungsabhängigen und einen feldabhängigen Teil läßt erwarten, daß der Hall-Effekt die gleichen Begleiterscheinungen aufweist wie die Magnetisierung, nämlich Hysterese, Kristallanisotropie und Spannungseinfluß; allerdings sind sie bei der üblichen Meßanordnung mit streifenförmigen Proben und dem Magnetfeld senkrecht zur Blechebene schwer nachzuweisen. Die Hysterese des Hall-Effekts hatte Pugh bereits selbst an einem Dauermagnetstahl beobachtet¹⁵⁾. Für den Einfluß der Kristallanisotropie bot die Eisen-Nickel-Reihe in der Legierung 50% Fe 50% Ni ein sehr geeignetes Objekt. Diese Legierung wird technisch mit einer gut ausgebildeten Würfeltexur hergestellt. Bei Stromdurchgang in der [110]-Richtung wurde eine um 2,3% kleinere Hall-Konstante R_1 gefunden als in der Würfelkantenrichtung [100]. Es wird erwartet, daß bei tieferer Temperatur und entsprechend geringem spezifischen Widerstand die Einflüsse der Kristallanisotropie und der elastischen Spannungen auf den außerordentlichen Hall-Effekt sich stärker bemerkbar machen werden als bei +20 °C. Bei dem ordentlichen Hall-Effekt wurde keine Anisotropie beobachtet.

Einfluß der Überstrukturausbildung bei Permalloy

Der außerordentliche Hall-Effekt ändert sich ähnlich wie der spezifische Widerstand bei Störungen des Kristallgitters, z. B. durch Kaltverformung und andererseits auch bei der Einstellung einer geordneten Atomverteilung (2 h 1150 °C (H_2) Ofenabkühlung ($\sim 2^\circ\text{C}/\text{min}$)). Nach Abb. 7 wird bei Permalloy (75% Ni) der außerordentliche Hall-Effekt durch Kaltverformung vergrößert, durch geordnete Atomverteilung dagegen wird er verkleinert. Der ordentliche Hall-Effekt des Permalloys änderte sich bei Eintritt der Ordnung nur wenig.

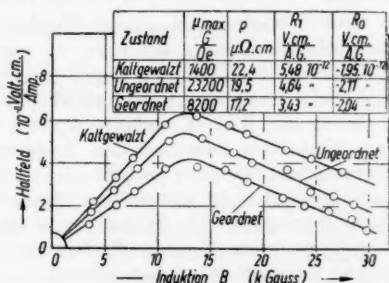


Abb. 7. Hall-Feldkurven von Permalloy (75,6% Ni)

¹³⁾ W. Jellinghaus u. M. P. de Andrés, Naturwiss. 45, 508 (1958).

¹⁴⁾ W. Jellinghaus u. M. P. de Andrés, Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1958; Dr. Riederer Verlag, Stuttgart 1959, S. 12.

¹⁵⁾ E. M. Pugh, Physic. Rev. 36, 150 (1930).

Plastische Verformung und außerordentlicher Hall-Effekt

Die bekannte Permeabilitätserhöhung von Permalloy mittels einer Zugspannung im elastischen Bereich wird durch eine im Verhältnis zu den Komponenten Eisen und Nickel kleine Anisotropieenergie ermöglicht. Die Leichtigkeit, mit der bei dieser Legierung eine magnetische Vorzugsrichtung geschaffen werden kann, bedeutet jedoch nicht, daß Permalloy gegenüber Störungen des Kristallgitters unempfindlich sei. Durch plastische Verformung wird die Permeabilität stark erniedrigt und der Widerstand erhöht. Ähnliches gilt für den magnetisierungsabhängigen Teil des Hall-Effekts der Eisen-Nickel-Legierungen und insbesondere des Permalloys; vgl. Tab. 2.

Tabelle 2
Einfluß einer Kaltverformung mit 80 bis 90%. Querschnittsabnahme auf die Hall-Konstante R_1 und den spezifischen Widerstand

Werkstoffe	R_1 (Volt · cm) (Amp. Gauß)		$\frac{\Delta R_1}{R_1}$ %	ϱ ($\mu\Omega$ · cm)		$\frac{\Delta \varrho}{\varrho}$ %
	Ausgangszustand	Verformt		Ausgangszustand	Verformt	
Reines Eisen	$5,83 \cdot 10^{-12}$	$5,85 \cdot 10^{-12}$	$< 1,0$	10,5	11,1	5,4
79,95/20,05 Fe-Ni-Leg.	$44,9 \cdot 10^{-12}$	$45,2 \cdot 10^{-12}$	$< 1,0$	35,4	36,1	1,9
66,6/33,4 Fe-Ni-Leg.	$234,1 \cdot 10^{-12}$	$234,5 \cdot 10^{-12}$	$< 1,0$	83,2	84,9	2,0
49,84/50,16 Fe-Ni-Leg.	$30,5 \cdot 10^{-12}$	$32,1 \cdot 10^{-12}$	5,0	35,21	37,15	5,2
24,4/75,6 Fe-Ni-Leg.	$4,64 \cdot 10^{-12}$	$5,48 \cdot 10^{-12}$	15,3	19,5	22,4	12,9
20/80 Fe-Ni-Leg.	$1,34 \cdot 10^{-12}$	$1,67 \cdot 10^{-12}$	19,8	14,8	16,57	10,7
Reines Nickel	$-4,96 \cdot 10^{-12}$	$-5,46 \cdot 10^{-12}$	9,2	7,4	7,88	6,1

Die Proben waren nach einem Weichglühen von etwa 2,5 mm Bandstärke ohne Zwischenglühung auf etwa 0,3 mm Bandstärke kalt gewalzt worden; die Querschnittsabnahmen liegen zwischen 80 und 90%. Die Tafel zeigt sowohl bei den raumzentrierten als auch bei den flächenzentrierten Legierungen Zunahmen der Hall-Konstante R_1 und des spezifischen Widerstands ϱ . Ein festes Verhältnis zwischen den Änderungen der Hall-Konstante und den Widerstandsänderungen besteht nicht; die Karplus-Luttinger-Beziehung ist also hierauf nicht anwendbar. Bemerkenswert dürfte vielleicht sein, daß in dem Legierungsbereich, in dem die Anisotropieenergie ihre kleinsten Werte hat, also zwischen 75 und 80% Ni, die relative Änderung von R_1 durch Verformung am größten zu sein scheint.

Der ordentliche Hall-Effekt

Der ordentliche Hall-Effekt wird durch die Neigung der Hall-Feldkurven oberhalb der Sättigung gekennzeichnet; vgl. Abb. 2 bis 4. Für die

Konstante R_0 wird entweder die Einheit Volt · cm/Gauß · Ampere oder die um den Faktor 10^8 größere Einheit cm³/Ampere · Sekunde benutzt. Durch Nickelzusatz zu Eisen steigt R_0 an; Abb. 8. Der Übergang von raumzentrierten zum flächenzentrierten Kristallgitter bringt eine unstetige Zunahme von R_0 mit sich. Zwischen 30 und 50 Atom-% Ni sinkt die Hall-Konstante auf Null, sinkt dann im Gebiet negativer Werte weiter bis zu einem Minimum bei rund 66 Atom-% Ni und steigt dann langsam zu dem ebenfalls negativen R_0 -Wert des reinen Nickels an.

Für eine Legierungsreihe, in der ein Element und eine Reihe benachbarter Legierungen mit positivem Hall-Effekt auftreten, kann man zwar formal noch eine effektive Elektronenzahl ausrechnen; es ist aber zweifelhaft, ob dies physikalisch noch sinnvoll ist. Man kann dem experimentell beobachteten positiven Vorzeichen des Hall-Effekts formal dadurch gerecht werden, daß man eine Bewegung positiver Ladungsträger im elektrischen Felde annimmt; dies muß einen Hall-Effekt mit positivem Vorzeichen ergeben. Die Verfasser möchten sich darauf beschränken, ihre Versuchsergebnisse nach einem für die Löcherleitung entwickelten Formalismus auswerten und zur Erörterung zu stellen. J. P. Jan⁴⁾ gibt nach einer von E. H. Sondheimer¹⁶⁾ entwickelten Theorie des Zweiband-Modells folgende Formel:

$$R = -\frac{1}{e} \cdot \frac{\frac{\sigma_e^2}{N_e} - \frac{\sigma_h^2}{N_h}}{(\sigma_e + \sigma_h)^2} \quad (8)$$

Hierin bedeuten: e Elektronenladung
 σ_e Elektronenanteil an der Leitfähigkeit,
 σ_h Löcheranteil an der Leitfähigkeit,
 N_e Elektronen je cm³,
 N_h Zahl der Löcher je cm³,
 R Hall-Konstante.

Man kann diese Gleichung ein wenig umformen: Die Leitfähigkeitsanteile werden durch die Produkte aus Elementarladung, Trägerdichte und Beweglichkeit ersetzt; ferner wird die Summe der beiden Leitfähigkeitsanteile durch die experimentell bestimmte Summe bzw. ihren Kehrwert, den spezifischen Widerstand ρ ersetzt.

$$R = -e (N_e v_e^2 - N_h v_h^2) \rho^2 \quad (9)$$

¹⁶⁾ E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. London A 193, 484 (1948).

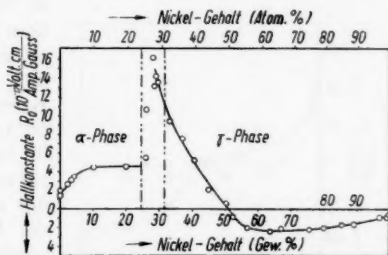


Abb. 8. Hall-Konstante R_0 des feldabhängigen Hall-Effekts der Eisen-Nickel-Legierungen

Schließlich werden die Trägerdichten N_e und N_h mittels des Atomgewichts A , der Dichte D und der Loschmidtschen Zahl N_L in Ladungen je Atom umgerechnet:

$$\frac{R_0}{e^2} \cdot \frac{A}{e N_L \cdot D} = (n_h \cdot v_h^2 - n_e \cdot v_e^2) = M. \quad (10)$$

Die linke Seite der Gleichung enthält nur experimentell zugängliche Größen; die rechte Seite enthält in korpuskularer Ausdrucksweise eine Funktion der Beweglichkeiten und der auf je 1 Atom entfallenden Löcher und Elektronen. Bei verschwindender Löcherleitung, d. h. wenn man die Beweglichkeit der Löcher $v_h = 0$ annimmt, geht die Gl. (10) in Gl. (1) über. Die Größe M ist in Tab. 2 verzeichnet und in Abb. 9 über dem Nickelgehalt der Legierungen graphisch aufgetragen. Man unterscheidet sehr deutlich einen im positiven Feld verlaufenden Kurvenast von 100 Atom-% Fe bis 50 Atom-% Ni und einen negativen Ast von 50 bis 100 Atom-% Ni. Man kann dies Ergebnis als Überwiegen der Löcherleitung auf der eisenreichen Seite und als Überwiegen der Elektronenleitung auf der Nickel-Seite ansehen. Der Wechsel des Kristallgitters bei 25 bis 30% Ni macht sich in M kaum bemerkbar. Der Verlauf von M als Funktion des Nickel-Gehalts ist auf der Eisenseite hyperbelähnlich. Oberhalb von 50 Atom-% Ni sinkt M nochmals stärker ab, verläuft dann bei weiter gesteigertem Nickel-Gehalt flach und mündet schließlich bei reinem Nickel. Die starke Änderung des Funktions-

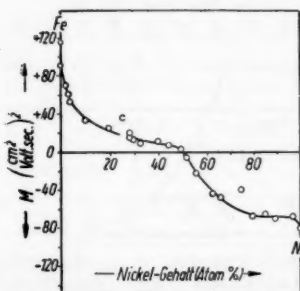


Abb. 9. Elektronenleitung und Löcherleitung der Eisen-Nickel-Legierungen gekennzeichnet durch M

$$\frac{R_0}{e^2} \cdot \frac{A}{e \cdot N_L \cdot D} = M; \quad M = f(\text{cNi})$$

verlaufs bei 50 Atom-% deutet an, daß eine Änderung im Leitungsmechanismus eintritt, wenn die aus den atomaren Anteilen gemittelte Ordnungszahl die ganze Zahl 27 überschreitet.

Bemerkenswert ist noch die verhältnismäßig große Wirkung kleiner Nickel-Zusätze auf die Größe M in der Nähe des reinen Eisens. Man kann dies der Formel (10) entsprechend durch Verminderung der Löcherbeweglichkeit deuten. Diese am Hall-Effekt gewonnene Erfahrung erinnert sehr an die alten Beobachtungen über die unverhältnismäßig starke Wirkung kleiner Zusätze eines zweiten Metalls auf die Leitfähigkeit des Grundmetalls einer Legierungsreihe. Etwas Ähnliches findet sich auf der Nickel-Seite des Systems; formal könnte man hier von einer Erniedrigung der Elektronenbeweglichkeit durch Eisen-Zusätze zu Nickel sprechen.

Aus der geringfügigen Änderung, die die Größe M bei dem Übergang von raumzentrierten zu flächenzentrierten Legierungen erfährt, kann man nur schließen, daß die unstetigen Änderungen der Hall-Konstante R_0 , welche zunimmt, und der Leitfähigkeit, welche abnimmt, sich in der Funktion M ausgleichen. Die starke Senkung der Leitfähigkeit bei vergrößerter Hall-Konstante und wenig verändertem M erscheint formal möglich, wenn die Absolutbeträge der Produkte $n_h v_h^2$ und $n_e v_e^2$ um gleich viel abnehmen.

Die Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften hat diese Arbeit durch ein Stipendium gefördert; wir danken aufrichtig für diese Hilfe.

Wir danken auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die weitere Förderung dieser Arbeit.

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Eduard Houdremont † danken wir für Anregungen und der Fried.-Krupp-Widia-Fabrik für Probenmaterial.

Düsseldorf, Max-Planck-Institut für Eisenforschung.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. Mai 1959.

Raumladungsschwingungen in Halbleitern bei höheren Feldstärken

Von K. W. Böer und R. Rompe

Inhaltsübersicht

Es wird über raumzeitliche Schwingungen von Raumladungsgebieten im Innern von CdS-Einkristallen berichtet, die mit Hilfe elektro-optischer Methoden direkt sichtbar gemacht werden können. Auf die Ähnlichkeit dieser Raumladungsschwingungen in festen Körpern mit den laufenden Schichten in Niederdruckgasentladungen wird hingewiesen.

Der Ladungstransport in einem Halb- oder Photoleiter besitzt, wie seit längerem bekannt, eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Ladungstransport in einem Gasentladungsplasma. Sehr weit geht bei normalen Bedingungen, d. h. kleinen Feldstärken, diese Ähnlichkeit nicht, und das ist auch verständlich, wenn man an die Unterschiede der Bewegungen und Anregung denkt. In einem Halb- oder Photoleiter ist die Trägerkonzentration in erster Näherung unabhängig von der Stromstärke, es gilt das Ohmsche Gesetz. Ein Zusammenhang zwischen Trägerkonzentration und Stromstärke wird im allgemeinen indirekt über die Temperatur des Halbleiters oder direkt erst im Anlaufbereich des elektrischen Durchschlages zu erwarten sein. In einem Gasentladungsplasma, vor allem in einem Niederdruckplasma, gilt im allgemeinen das Ohmsche Gesetz nicht; es existiert ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der Trägerkonzentration, die etwa proportional zum Strom wächst. Der Leitungsvorgang wird durch das äußere elektrische Feld überhaupt erst herbeigeführt. Die äußere Feldstärke stellt sich so ein, daß eine stationäre Leitfähigkeit aufrechterhalten wird, wobei für die Ermittlung der Feldstärke ein energetisches Extremalprinzip, das Steenbeck'sche Minimumprinzip, angewandt werden kann. Bei Hochdruckentladungen ist die Analogie zum Halbleiter besser, da die von außen zugeführte, aus dem Feld stammende Energie zur Temperaturerhöhung des gesamten Gases verwendet wird. Immerhin gilt auch hier das Ohmsche Gesetz nicht, die Trägerkonzentration ist gut proportional der Stromstärke.

Geht man hingegen bei Halb- oder Photoleitern in den Anlaufbereich des elektrischen Durchschlages, so erhält man weitgehend Verhältnisse, wie sie auch in Niederdruckgasentladungsplasmen realisiert sind.

Die Träger entstehen dann auch im Halb- oder Photoleiter „überthermisch“, z. B. durch direkten Stoß freier, im äußeren elektrischen Feld beschleunigter Elektronen mit Fremdatomen und sonstigen Trägern von Elektronen niedriger Ionisierungsarbeit oder auch durch Feldemission aus solchen Stellen. Die

Träger
Gitters

Die
in einer
beschri
Elektro
Photole
sind die
Größen
Weglän
den Ab
den Ha

Tro
Überei
druckp
sind be
denen
weise a

Ein
Auftret
deren C
und Dr
der Ra
Form
gewese
aufmer
handel

In
Leitung
erhielt
wobei
zugäng
optisch
direkt
verlauf
dem in

So
ein Gel
falls ei
Anode
etwa d
deutlic
die auf

¹⁾ K
1, 23 (1
in Phys
²⁾ F
Physik

Trägerkonzentration nimmt, auch ohne Temperaturerhöhung des gesamten Gitters, mit der Stromstärke zu.

Die Bildung von ionisierten Atomen, Elektronen, von angeregten Atomen in einem Gasentladungsplasma wird durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben, die sehr ähnlich denen sind, die für das Entstehen von freien Elektronen, von Löchern, von angelagerten Elektronen in einem Halb- bzw. Photoleiter kennzeichnend sind. Vom Standpunkt dieser Reaktionskinetik sind die Unterschiede in den in die Gleichungen eingehenden charakteristischen Größen zu sehen, in der Größe der Ionisierungsenergie, in der mittleren freien Weglänge für die Stromträger, aber auch in den Vorgängen an den Elektroden, den Ablösearbeiten für den Übertritt von Elektronen aus den Elektroden in den Halbleiter und dergleichen mehr.

Trotz dieser Unterschiede erscheint es daher sinnvoll, nach qualitativen Übereinstimmungen zwischen dem Verhalten des Stromtransportes in Niederdruckplasmen und in Halbleitern bei höheren Feldstärken zu suchen. Hierfür sind besonders die Verhältnisse bei nichtstationären Vorgängen geeignet, bei denen Instabilitäten, die periodisch oder nicht periodisch sein können, Hinweise auf die Ähnlichkeit des Leitungsvorganges geben.

Ein Kennzeichen des Leitungsvorganges bei Niederdruckplasmen ist das Auftreten von Raumladungen und Feldverzerrungen in der Entladungsstrecke, deren Größe und Form von dem Parameter der Entladung, z. B. Stromstärke und Druck, abhängig sind. Als Folge derartiger räumlicher Inhomogenitäten der Raumladungen treten entsprechende Leuchterscheinungen auf, meist in Form nichtstationärer Schichten (laufende Schichten). Diese sind es auch gewesen, die die Physiker auf das Vorhandensein derartiger Instabilitäten aufmerksam gemacht haben, wie sie in den letzten Jahren mit Erfolg behandelt werden konnten¹⁾.

In einem Halb- oder Photoleiter war bislang eine optische Verfolgung des Leitungsvorganges nicht möglich. Lediglich durch Potentialsondenmessungen erhielt man Aufschluß über die Verteilung der Raumladung und des Feldes, wobei auch nur der Potentialverlauf entlang der Oberfläche der Messung zugänglich war. Erst in letzter Zeit gelang es unter Ausnutzung elektrooptischer Erscheinungen, den Feldverlauf auch im Inneren eines Halbleiters direkt sichtbar zu machen²⁾. Hierbei stellte es sich sofort heraus, daß der Feldverlauf in einem Halb- oder Photoleiter offenbar viel größere Ähnlichkeit mit dem in einem Niederdruckplasma besitzt, als bisher angenommen wurde.

So bildet sich vor der Kathode eine Raumladungsdoppelschicht und damit ein Gebiet besonders hohen Feldes aus, das direkt zu dem Gebiet des Kathodenfalls einer Gasentladung in Parallele gesetzt werden kann. Auch vor der Anode werden gelegentlich Gebiete besonders hohen Feldes festgestellt, die etwa dem Anodenfall entsprechen. Dabei sind diese Gebiete hohen Feldes deutlich von den Mott-Schottkyschen Randschichten zu unterscheiden, die auf eine relativ dünne Schicht in Elektrodennähe beschränkt sind. Über

¹⁾ K. Wojacek, Ann. Physik **2**, 68 (1958); **3**, 37 (1959); Monatsber. d. Akad. d. Wiss. **1**, 23 (1959); L. Pékarek, Czechoslov. J. Phys. **7**, 533 (1957) und Probleme des Plasmas in Physik und Astronomie, Berlin 1958; H. Rother, Ann. Physik in Druck.

²⁾ K. W. Böer, H. J. Hänsch u. U. Kümmel, Naturwiss. **45**, 460 (1958) und Z. Physik **155**, 170 (1959).

die hier erwähnten plasmaähnlichen Raumladungserscheinungen wurde an anderem Orte bereits ausführlich berichtet²⁾³⁾).

In dieser Arbeit soll auf periodische oder fast periodische Vorgänge beim Stromfluß hingewiesen werden, die nicht nur in der Gasentladung (bei den laufenden Schichten) sondern auch in festen Halbleitern oder Photoleitern eine wesentliche Bedeutung zu haben scheinen.

An CdS-Einkristallen wurde z. B. beobachtet, daß der ringförmig der Kathode vorgelagerte Raumladungsbereich (Kathodenfall) in einigen Fällen seine Lage nicht stationär beibehält, sondern langsam seinen Abstand von der Kathode vergrößerte. Erreichte dieser Bereich an einer Stelle die Anode, so zerfiel das Raumladungsgebiet in kurzer Zeit und es bildete sich ein neues vor der Kathode, das nun seinerseits zu wandern begann. Dieser Vorgang wiederholte sich in periodischer Reihenfolge. Die zeitliche Länge der Periode lag in der Größenordnung von 10 s.

Gleichzeitig mit der Verschiebung der Raumladungsgebiete im Innern des Kristalls wird eine Änderung des durch den Kristall fließenden Stromes beobachtet. Im Augenblick des Ablösens eines Raumladungsgebietes von der Kathode sinkt der Strom, steigt dann allmählich und wächst bei Erreichen der Anode ganz beträchtlich. Dann verschwindet das Raumladungsgebiet, der Strom sinkt wieder steil ab und der Vorgang wiederholt sich von neuem.

Bei anderen Kristallen wird eine periodische Lageänderung nur von Teilen des Raumladungsgebietes beobachtet. In einzelnen Kristallbereichen tritt vor der Kathode ein Pulsieren der Raumladungserscheinung auf. Hierbei können sich auch in komplizierter Weise Schwingungen verschiedener Ringteile überlagern. Auch diese Schwingungen sind mit entsprechenden periodischen Änderungen des Stromflusses durch den Kristall verbunden.

Die Periodenlänge dieser Schwingungen läßt sich durch Änderung der Belichtungsintensität variieren. Mit zunehmender Belichtungsintensität nimmt die Periodenlänge ab.

Das Auftreten von laufenden oder schwingenden Raumladungsschichten an CdS-Einkristallen ist offensichtlich von der Realstruktur der Kristalle abhängig. Auf diese Weise kann auch erklärt werden, daß bei Kristallen, die aus Kristallbereichen unterschiedlicher Realstruktur, also z. B. unterschiedlicher Dotierung bestehen, nur in einzelnen solcher Bereiche Raumladungsschwingungen auftreten.

Da die beobachteten Effekte weitgehende Ähnlichkeit mit den laufenden Schichten einer Gasentladung aufweisen, ist zu vermuten, daß auch hier Amplifikationen auftreten, die zu einer beträchtlichen Aufschaukelung der Feldstärke in den Raumladungsgebieten führen.

Ausführliche experimentelle und theoretische Untersuchungen zu diesem Themenkomplex sind in Vorbereitung. Besonders sei hier auf die anschließende Arbeit von H. Rother: „Zum Mechanismus diffusionsbestimmter Feldinstabilitäten in Halbleitern bei hohen Feldstärken“ verwiesen, in welcher eine erste theoretische Klärung dieser Dinge gegeben wird.

²⁾ K. W. Böer, Z. Physik **155**, 184 (1959) und Monatsber. d. Akad. d. Wiss. **1**, 272 (1959).

Berlin, Phys.-Techn. Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften und II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Mai 1959.

Zum Mechanismus diffusionsbestimmter Feldinstabilitäten in Halbleitern bei hohen Feldstärken

Von H. Rother

Inhaltsübersicht

Bedingungen für den diffusionsbestimmten Aufbau starker Raumladungsfelder in Halbleitern und Photohalbleitern werden abgeleitet. Unter der Voraussetzung, daß eine (geringe) Feldemission aus Haftstellen oder Donatoren ins Leitfähigkeitsband stattfindet und daß die Haftstellen- bzw. Donatorenkonzentration genügend groß ist gegenüber der Konzentration freier Elektronen klingt beim Überschreiten einer gewissen Grenzfeldstärke des homogenen Feldes eine lokale Schwankung der Feldstärke (oder Trägerkonzentration) nicht mehr ab, sondern kann unter Abwanderung zur Anode oder Kathode schon auf Strecken von 10^{-3} – 10^{-4} cm exponentiell auf ein Vielfaches des ursprünglichen homogenen Feldes anwachsen. Amplifikation, Fortpflanzungseigenschaften, Dispersion und Ausdehnung der Raumladungsschichten werden berechnet. Der Einfluß derartiger Raumladungsfelder auf den Felddurchschlag bleibt Gegenstand weiterer Untersuchungen.

A. Einleitung

Von Böer, Hänsch und Kümmel wurden kürzlich¹⁾ Untersuchungen an CdS-Kristallen in hohen Feldstärken ($\gtrsim 5$ kV/cm) vorgelegt, in denen aus dem optischen Erscheinungsbild der Kristalle darauf geschlossen wird, daß sich in einem schmalen Bereich (Bruchteilen eines Millimeters) spontan Raumladungsfelder aufbauen, die das von außen angelegte Feld E um das 10- bis 100fache übersteigen.

Diese schmalen Raumladungszonen können in stationären Fall mit Geschwindigkeiten von $\approx 10^{-2}$ cm/sec von der Kathode zur Anode wandern und werden von dort wieder zur Kathode zurückgekoppelt (ähnlich den laufenden Schichten in Gasentladungen). Vor der Kathode bildet sich im allgemeinen eine stationär ruhende Doppelschicht.

Von Böer²⁾ wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die Trägerbilanzgleichungen des Kristalls (I–III) in Verbindung mit der Poissongleichung (IV) bei Eintritt von Feldemission bzw. Stoßionisation der Haftstellen eine „Feldaufwölbung“ hervorgerufen könnten. Adiwowitsch³⁾ zeigte, daß unter Vor-

¹⁾ K. W. Böer, H. J. Hänsch u. U. Kümmel, Naturwiss. **45**, 460 (1958) sowie Z. Physik **155**, 170 (1959).

²⁾ K. W. Böer, Z. Physik **155**, 184 (1959).

³⁾ E. I. Adiwowitsch, Z. Physik **155**, 195 (1959).

aussetzung eines derartigen Feldaufwölbungsmechanismus nach Erreichen einer hinreichend großen lokalen Feldstärke, bei der eine vollständige Ionisierung der Haftstellen bzw. Donatoren stattfindet, sich eine Doppelschicht hoher Feldstärken stationär vor der Kathode ausbilden kann. In einer Arbeit von Böer und Rompe wird auf die Möglichkeit von Raumladungsschwingungen in Halbleitern hingewiesen, und einige Beobachtungen über solche Schwingungen mitgeteilt⁴⁾.

Im folgenden wird das System der Bilanzgleichungen nach der Methode der kleinen Störungen untersucht, die sich bei der Behandlung ähnlicher Gleichungssysteme in der Gasentladungsphysik (laufende Schichten) als sehr geeignet erwiesen hat⁵⁾.

Eine beliebige Störung im Innern des Kristalls läßt sich, wenn wir uns der Einfachheit halber auf den eindimensionalen Fall beschränken, darstellen als Überlagerung von Wellen der Form

$$a = a_0 e^{i(Kx - \omega t)}: \text{ mit } K = K(\omega) = k + i d. \quad (1)$$

In der Regel gehören bei Diffusionsgleichungen zu einem bestimmten k -Wert Werte von d , die einer Dämpfung in Richtung der Gruppengeschwindigkeit $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ entsprechen: eine lokale Störung der homogenen Verteilung von Trägerkonzentration n_e oder Feld E wird mit einer Zeitkonstante $\frac{1}{\tau} = \frac{\partial \omega}{\partial k} d$ dissipiert. Instabilitäten treten nur auf, falls in irgendeinem (wenn auch schmalen) Frequenzband Lösungen existieren, für die $d \frac{\partial \omega}{\partial k} < 0$. Existenz und Verhalten dieser Lösungen sollen im folgenden diskutiert werden.

B. Dispersionsgleichung

Wir behandeln zunächst das Modell eines Photohalbleiters mit n -Leitung im äußeren elektrischen Feld, durch das eine schwache Feldemission aus Haftstellen ins Leitfähigkeitsband hervorgerufen wird. Unter Vernachlässigung von Stoßionisation (die im allgemeinen lediglich die kritischen Feldstärken etwas heruntersetzt) erhalten wir nach Böer²⁾ das System von Bilanzgleichungen:

$$\frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} + \text{div}(\tilde{n}_e w_e) = S + \zeta \tilde{N}_e - A(H - \tilde{N}_e) \tilde{n}_e - B \tilde{N} \tilde{n}_e \quad (I)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial t} = -\zeta \tilde{N}_e + A(H - \tilde{N}_e) n_e \quad (II)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} = S - B \tilde{N} \tilde{n} \quad (III)$$

und die Poissongleichung

$$\text{div } \mathcal{E} = 4\pi e (\tilde{N} - \tilde{N}_e - \tilde{n}_e). \quad (IV)$$

⁴⁾ K. W. Böer u. R. Rompe, Ann. Physik (7) 5, 200 (1956).

⁵⁾ H. Rother, Ann. Physik (im Druck).

Hierin sind \tilde{n}_e , \tilde{N}_e bzw. \tilde{N} die momentanen Konzentrationen der Leitungselektronen, der Elektronen in Haftstellen bzw. der positiven Löcher, H die Haftstellenkonzentration, w_e ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen, S die pro Zeit und Volumeneinheit durch Bestrahlung (oder thermisch) erzeugten Leitungselektronen, A bzw. B die Rekombinationskoeffizienten freier Elektronen mit Haftstellen bzw. positiven Löchern, $N_e \zeta$ die Feldemission besetzter Haftstellen.

Mit $\tilde{n}_e = n_e (1 + v_e)$, $\tilde{N} = N (1 + v_p)$, $\tilde{N} - \tilde{N}_e - \tilde{n}_e = N \varrho$ und dem Ansatz (1) für v_e , v und ϱ ergibt sich für K die (komplexe) Dispersionsgleichung:

$$a_2 K^2 - a_1 K + a_0 = 0 \quad (2)$$

mit

$$a_2 = n_e Z - i \omega \quad \text{wo } Z = A + \frac{1}{n_e} \zeta$$

$$a_1 = \frac{n_e}{N} \omega + i \left[\frac{n_e^2}{N} Z - \frac{4 \pi n_e k T_e N_e}{E} \frac{\partial \zeta}{\partial E} \right]$$

$$a_0 = \frac{4 \pi e n_e^2}{E} \left[A \frac{(H - N_e)}{N} + B \frac{n_e}{N} + A \frac{n_e}{N} \right] + 4 \pi e n_e \frac{N_e}{N} \frac{\partial \zeta}{\partial E} - \frac{n_e}{N} \frac{\omega^2}{b_e E} + i \omega \left[\frac{4 \pi e n_e}{N E} + n_e \left(A \frac{H - N_e}{N} + B \frac{n_e}{N} + A \frac{n_e}{N} \right) \right].$$

Man überzeugt sich leicht, daß (2) nur zeitlich abklingende (gedämpfte) Lösungen enthält.

Bei der von Böer und Adiwitsch l. c. vorausgesetzten raumzeitlichen Konstanz der Elektronentemperatur ist folglich nach I–IV keinerlei Instabilitätsmechanismus möglich.

Wegen der bekannten Relation⁶⁾ zwischen Diffusions- und Wärmeleitkoeffizienten bewirken jedoch lokale Schwankungen der Trägerkonzentration auch lokale Schwankungen der Trägertemperatur von gleicher relativer Größe und umgekehrt, sobald die Elektronentemperatur wesentlich über der Gittertemperatur liegt. Gln. I–IV reichen daher nicht aus, um die wirklichen Vorgänge im Kristall wiederzugeben. Es tritt zum System der Bilanzgleichungen noch die Energiebilanz der Elektronen:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial (\tilde{n}_e \tilde{U}_e)}{\partial t} + \text{div} \left(n_e w_e^* \frac{3}{2} \tilde{U}_e \right) = \tilde{n}_e w_e \mathcal{E} - C \tilde{n}_e (U_e - U_g) \quad (V)$$

hinzu.

Hierin ist $\frac{3}{2} e U_e = \frac{3}{2} k T_e$ die kinetische Energie der Leitungselektronen, $e C (U_e - U_g)$ die Energieübertragung auf das Gitter. Im folgenden sei stets $\frac{U_e - U_g}{U_e} \gtrsim 1$, d. h. bereits merkliche Abweichung vom Gleichgewicht eingetreten.

⁶⁾ Vgl. S. Chapman u. T. G. Cowling, *Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge 1952.

Wir setzen:

$$\tilde{U}_e = U_e (1 + v)$$

$$w_e = - \left[b_e E + b_e \tilde{U}_e \frac{1}{n_e} \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial x} + \left(\delta - \frac{3}{2} \right) b_e \frac{\partial \tilde{U}_e}{\partial x} \right]$$

$$w_e^* = - \frac{2}{3} \delta \left[b_e E + b_e \tilde{U}_e \frac{1}{n_e} \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial x} + \left(\delta^* - \frac{3}{2} \right) b_e \frac{\partial \tilde{U}_e}{\partial x} \right]$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{b_e E} \frac{\partial \tilde{U}_e}{\partial E} E; \quad A = \frac{A}{b_e E}; \quad B = \frac{B}{b_e E}; \quad A_1 = \frac{1}{b_e E} \left(A + \frac{1}{n_e} \zeta \right)$$

$$V_e = \frac{U_e}{E}; \quad \gamma = \frac{U_e}{b_e} \frac{\partial b_e}{\partial U_e}; \quad \beta = \frac{U_e}{A} \frac{\partial A}{\partial U_e}; \quad H_T = \frac{U_e}{b_e E^2} \frac{\partial C (U_e - U)}{\partial U_e}$$

$$\omega = \frac{\omega}{b_e E}; \quad K = V_e K; \quad k = V_e k; \quad d = V_e d,$$

wo b_e die Elektronenbeweglichkeit und E die (homogene) Feldstärke des äußeren Feldes. (Näherungsweise ist $\delta = 2$, $\delta^* = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\varepsilon \approx 1$.) Dann ergibt I-V das homogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \left(-i \frac{\omega}{V_e} + B n_e \right) v_p + B n_e v_e + \beta n_e B v = 0 \\ & \left[-i \frac{\omega}{V_e} + \frac{4 \pi e}{E} n_e \right] \varrho + \left[i K \frac{n_e}{N} - K^2 \frac{n_e}{N} V_e \right] v_e + \left[i K \gamma \frac{n_e}{N} - K^2 \frac{1}{2} V_e \frac{n_e}{N} \right] v = 0 \\ & \left[-i \frac{4 \pi e N}{K E} \tilde{\zeta} + i \frac{\omega}{V_e} - n_e A_1 \right] \varrho + \frac{n_e}{N} \left[i \frac{\omega}{V_e} - A (H - N_e) - n_e A_1 \right] v - \beta \frac{n_e}{N} A H v \\ & \quad + \left[-i \frac{\omega}{V_e} + n_e A_1 \right] v_p = 0 \quad (3) \\ & \left[i \frac{4 \pi e N}{K E} \left(\frac{4}{3} V_e - \frac{N_e}{n_e} \tilde{\zeta} \right) - N A_1 - \frac{4 \pi e}{3 E} N \right] \varrho - \left[A (H - N_e) + B N + n_e A_1 \right. \\ & \quad + i K - \frac{1}{3} k^2 V_e \left. \right] v_e + \left[-i \frac{\omega}{V_e} + \frac{2}{3} \frac{(H_T - \gamma)}{V_e} - i K \left(\frac{5}{3} + \gamma \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 V_e K^2 \right] v + (A_1 - B) N V_e. \end{aligned}$$

Wir nehmen grundsätzlich an, daß $\varepsilon > \gamma$, d. h. die von den Elektronen aufgenommene Energie kann noch immer an das Gitter abgegeben werden⁷⁾. Außerdem wird $\frac{n_e}{N} = \frac{N - N_e}{N} \approx \frac{n_e}{H}$ konsequent gegen eins vernachlässigt⁸⁾,

⁷⁾ $\gamma > \varepsilon$ würde im Rahmen dieser Näherung nicht mehr die Definition einer einheitlichen Elektronentemperatur zulassen und notwendig die Feldverteilung instabil werden lassen.

⁸⁾ Für die von Böer, Hänsch und Kümmel untersuchten CdS-Kristalle ist nach freundlicher persönlicher Mitteilung von Dr. Böer $n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ und $H \approx N \approx 10^{13} - 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

da eine merkliche Amplifikation nur stattfinden kann, solange $\frac{n_e}{N} \sim 1$; die Haftstellen H im ungestörten System sind praktisch mit Elektronen gesättigt (hinreichend tiefe Temperatur vorausgesetzt). Dann ergibt sich als Lösungsbedingung für (3)

die Dispersionsgleichung:

$$[-a + \delta_0 \omega i] K^4 + [\delta_1 \omega - \alpha_3 a i] K^3 - [\alpha_2 a - H_0 \omega i] K^2 + H_1 \omega - \alpha_1 a i] K - \alpha_0 + \alpha_{00} a \omega i = 0.$$

Hierin ist

$$a = \delta_0 n_e A_1 \quad \alpha_{00} a = \frac{1}{3} F \cdot \frac{n_e}{N}$$

$$\alpha_3 a = \delta_0 F \frac{N_e}{N} \tilde{\xi} - \frac{\delta_1}{\delta_0} a$$

$$\alpha_2 a = \delta_1 F \left[\frac{N_e}{N} \tilde{\xi} + \frac{4}{3} n_e B \frac{\omega^2}{n_e^2 B^2 + \omega^2} - \frac{1}{4} n_e B \right] - a$$

$$\alpha_1 a = H_0 F \left[\left(1 - \frac{NB}{H_0} \right) \tilde{\xi} - \frac{1}{H_0} \left\{ \frac{8}{3} - \gamma - \delta \left(1 - \frac{\gamma}{3} \right) \right\} n_e B \right] - H_1 n_e A_1;$$

$$\alpha_0 a = H_1 F \left[\frac{N_e}{N} \tilde{\xi} - \frac{4}{3 H_1} n_e B \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \right]$$

mit $F = \frac{4 \pi e N U_e}{E^2}$; $H_0 = \frac{2}{3} H_T - \left(\frac{4}{3} \delta - 1 \right)$; $H_1 = \frac{2}{3} (H_T - \gamma)$;

$$\delta_0 = \frac{2}{3} \delta (\delta^* - \delta); \quad \delta_1 = \delta_0 + \frac{2}{3} \delta.$$

C. Eigenschaften der Raumladungswellen

Eine allgemeine Lösung von (4) ist schwer durchzuführen. Das Gleichungssystem I–V hat jedoch im allgemeinen nur gedämpfte Lösungen. Die schmalen Frequenzbereiche, in denen Instabilitäten auftreten, müssen jeweils zwischen zwei reellen Wurzeln der Gl. (4) liegen. Um die Eigenschaften der Aufschaukelungsprozesse zu erfassen genügt es daher, die Lösungen in der Umgebung solcher reellen Wurzeln zu untersuchen.

Die gesuchten Wurzeln sind simultane, reelle Lösungen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } f &= a k^4 - \delta_1 \omega k^3 + \alpha_2 a k^2 - H_1 \omega k + \alpha_0 a = 0 \\ \text{b) } g &= \delta_0 \omega k^4 - \alpha_3 a k^3 + H_0 \omega k^2 - \alpha_1 a k + \alpha_{00} \omega = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

a) Wellen mit $\frac{\partial \omega}{\partial k} < 0$ (Störung wandert zur Anode)

Für nicht zu kleine ω und

$$\text{a) } \alpha_0 > 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } \alpha_3 > 0 \quad (7)$$

existiert eine Näherungslösung, die für große ω

$$k_1 \approx \frac{F \tilde{\xi}}{\omega} \quad (8)$$

(die exakte Lösung k_1 erfordert eine numerische Berechnung der Nullstellen von (6a), die für

$$\omega_1 \approx \frac{\frac{\alpha_1}{2} a}{\sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \frac{2}{9} \alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}}}$$

eine reelle Lösung von $F(K) = f - i g = 0$ darstellt. Dieser Lösung entspricht in der Umgebung von $k_1(\omega_1)$ eine Welle der Gruppengeschwindigkeit v_g :

$$\frac{v_g}{b_e U_e} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = R_e \left(- \frac{\partial(f - i g)}{\partial k} \right) / \frac{\partial(f - i g)}{\partial \omega} \approx -10 \alpha_1 a. \quad (9)$$

Die Amplifikationskonstante d ist:

$$d = J \left(- \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial F}{\partial k} \right) \Delta \omega \approx - \frac{\Delta \omega}{20 \alpha_1 a}, \quad (10)$$

d ist also positiv im Frequenzband

$$\omega_1 > \omega \gtrsim a \sqrt{\alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (11)$$

Die Bedingung (7) ist erfüllt, wenn die Ausgangsfeldstärke so hoch wird, daß

$$\frac{\partial \zeta}{\partial E} E \gtrsim 2 n_e B. \quad (12a)$$

Außerdem muß die Dotierung so groß sein, daß zugleich

$$4 n_e N \frac{U_e}{E^2} \frac{\partial \zeta}{\partial E} E \gtrsim n_e A \quad (12b)$$

erfüllt ist*).

(Zu geringe Haftstellenkonzentration setzt den Schwellenwert der Feldstärke herauf.)

(8) entspricht einem Wellenpaket mit einer ursprünglichen Ausdehnung von $\Delta x \approx \frac{U_e}{E}$ ($\approx 10^{-4}$ cm), das sich unter ständiger Amplifikation mit $d \approx \frac{E}{U_e}$ ($\approx 10^{-4}$ cm $^{-1}$) und einer gewissen räumlichen Dissipierung von seinem Entstehungsort zur Anode hin bewegt mit einer Geschwindigkeit:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \approx 10 \left(\frac{U_e}{E} \right)^2 \frac{4 \pi e N_e}{E} \frac{\partial \zeta}{\partial E} E^9. \quad (13)$$

Die Raumladungsfeldstärke in diesem Wellenpaket erreicht (nach (IV)) im Rahmen der hier durchgeführten linearisierten Theorie Beträge bis zu ($\varrho \approx 1$ als obere Grenze betrachtet):

$$\Delta \mathcal{E} \approx \frac{4 \pi e N}{E} U_e. \quad (14)$$

Ob (14) einen oberen Grenzwert darstellt, oder ob trotz nichtlinearer Einflüsse noch ein weiteres Anwachsen der Feldstärke über den Wert (14) möglich

*) Eine Beweglichkeit positiver Löcher begünstigt die Amplifikation wesentlich. (12 a u. b) haben nur den Charakter notwendiger Bedingungen.

⁹⁾ v_g ist natürlich wegen (12b) nicht notwendig proportional zu N_e .

ist, läßt sich im Rahmen dieser Untersuchungen nicht entscheiden. Mit den in¹⁾ benutzten experimentellen Daten:

$$E = 5 \cdot 10^3 \text{ V/cm}, \quad b_e = 100 \text{ cm}^2/\text{Vsec}, \quad U_e \approx 0,1 \text{ V}$$

ergibt sich für eine Dotierungskonzentration $H \approx N = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ nach (14):

$$\Delta E \approx 5 \cdot 10^5 \text{ V/cm}.$$

Bei derselben Dotierung und Ausgangsfeldstärken für die $\tilde{\zeta} \approx n_e A$ ergibt sich nach (13) für die Gruppengeschwindigkeit der (experimentell gemessene) Wert $v_g = 1 \text{ cm/sec}$.

Wenn die Raumladungswelle die Anode erreicht, so wird die zugehörige Spannungsschwankung auf den Stromkreis übertragen und zur Kathode rückgekoppelt. (Der Rückkopplungsfaktor hängt wahrscheinlich im Gegensatz zur Rückkopplung von Raumladungswellen in Gasentladungen⁴⁾, wesentlich ab vom speziellen Injektionsmechanismus an der Kathode und soll hier nicht näher untersucht werden.)

Falls durch die überhöhte Raumladungsfeldstärke im Wellenpaket alle Haftstellen entvölkert wurden, so können im Gebiet hinter der Welle erst wieder Störungen instabil werden, wenn durch Belichtung die Haftstellen wieder nachgefüllt worden sind. (Beim weiter unten diskutierten Temperaturhalbleitertyp ist diese Bedingung nicht erforderlich.) Die experimentellen Zeiten in¹⁾ zur Wiederauffüllung der Haftstellen lagen bei $1 \text{ Sec}^{10)}$, so daß experimentell noch nicht mit Sicherheit entschieden werden kann, ob einmal entstandene Raumladungswellen auch stationär durch den Kristall wandern würden, wenn $N \approx H^{11)}$, was einer nur teilweisen Entvölkerung entsprechen würde.

Die Feldemissionswahrscheinlichkeit $\zeta(E)$ hängt von der Feldstärke ab mit $\zeta = \zeta_0 e^{-E^2/E^2}$, wobei im allgemeinen $E_0 \gg E$.

Die Bedingung (12a): $\frac{\partial \zeta}{\partial E} E > n_e A$ besagt also, daß die Zahl der pro Zeiteinheit durch Feldemission entstandenen Leitungselektronen noch weit unter deren Rekombinationswahrscheinlichkeit liegen darf, wenn der oben beschriebene Instabilitätsmechanismus schon in Erscheinung tritt.

b) Wellen mit $\frac{\partial \omega}{\partial k} < 0$ (Störung wandert zur Kathode)

Für eine weitere Wurzel k_2 von (6) ist unter Umständen ein schmaler Bereich mit $\frac{\partial k}{\partial \omega} d < 0$ möglich. Für k_2 gilt: $k_2 > 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial k_2} > 0$. Diese Lösung entspricht einem Wellenpaket, daß sich bei $d < 0$ amplifiziert auf die Kathode zu bewegt. (Die Gruppengeschwindigkeit ist erheblich größer als für k_1 .)

Wellen mit $d < 0$ liegen bei $\omega \approx \frac{a_3}{2} a$. Für k_2 gilt genähert:

$$k_2 \approx \frac{a_3}{6\omega} + \sqrt{\frac{a_3^2}{36\omega^2} + \frac{1}{3}}.$$

¹⁰⁾ Nach freundlicher Mitteilung von Dr. Böer.

¹¹⁾ Experimentelle Hinweise, daß dies nicht eintritt, geben Untersuchungen⁴⁾ über die Abhängigkeit der Schichtperiode von der Bestrahlungsintensität.

Notwendige Bedingung für Amplifikation ist außer (11)

$$0 < \frac{4\pi e N U_e}{E^2} \tilde{\zeta} \lesssim n_e A. \quad (15)$$

Wellen dieser Art treten daher, wenn überhaupt, nur in einem sehr schmalen Feldstärkebereich auf, im allgemeinen dicht unterhalb der Schwellenfeldstärke der k_1 -Wellen.

D. Instabilitäten bei Halbleitern

Das von Adiwitsch¹⁾ behandelte Halbleitermodell mit den Reaktionsgleichungen:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_1 v_e) = W + \zeta (D - n_p) - A n_e n_p \quad (I')$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = W + \zeta (D - n_p) - A n_e n_p \quad (III')$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi e (n_p - n_e) \quad (IV')$$

führt in Verbindung mit der Gl. (V) auf eine mit (4) nahezu identische Dispersionsgleichung.

Nur daß statt $N_e \gg n_e$ hier die Donatorenkonzentration $D \gg n_e$ sein muß.

Außerdem werden für Halbleiter im Rahmen der linearisierten Theorie wegen (IV') nur sehr viel kleinere Raumladungsfeldstärken erreicht, da $n_p - n_e = n_e \varrho \ll D$, während für Photohalbleiter nach (IV):

$$N - N_e - n_e = H \varrho \gg n_e$$

ist.

Herrn Prof. Rompe danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Berlin, Physikalisch-Technisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Mai 1959.

Es
schen
durch
bei ei
konsta
tempe
stante

Zu
schen
Im Ge
dünn
richtu
überei
Die
aus M
geschä
sierung
Schich
ten ni
Über
der ge

2. F
Als
kreisfö

*)
**)
1) 1
2) 0
3) 1

Über die einachsige magnetische Anisotropie dünner Schichten und ihre zeitliche Änderung

Von Zdeněk Málek*), Walter Schüppel, Otto Stemme
und Wilfried Andrä**)

Mit 3 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wird über die direkte Messung der Konstanten der einachsigen magnetischen Anisotropie dünner ferromagnetischer Schichten berichtet, die entweder durch Aufdampfen oder auf elektrolytischem Wege hergestellt wurden. Die bei einigen Proben beobachteten zeitlichen Änderungen der Anisotropiekonstanten wurden näher untersucht, indem einige Schichten bei Zimmertemperatur definierten Magnetfeldern ausgesetzt und ihre Anisotropiekonstanten systematisch gemessen wurden.

1. Einleitung

Zum Verständnis der Magnetisierungsprozesse in dünnen ferromagnetischen Schichten ist die Kenntnis ihrer magnetischen Anisotropie erforderlich. Im Gegensatz zu den massiven Materialien handelt es sich bei polykristallinen dünnen Schichten vorwiegend um eine einachsige Anisotropie, deren Vorzugsrichtung mit der Richtung eines bei der Herstellung wirkenden Magnetfeldes übereinstimmt.

Die Größe der zugehörigen Anisotropiekonstanten K^* wurde zunächst aus Messungen der effektiven Anisotropiefeldstärke¹⁻³⁾ für Permalloy abgeschätzt; jedoch gelten diese Abschätzungen nur, wenn die Ummagnetisierung durch reine Drehung der Magnetisierung erfolgt, die dabei in der ganzen Schicht homogen bleiben soll. Weil diese Voraussetzung bei dickeren Schichten nicht mehr erfüllt ist, wird eine direkte Messung von K^* erforderlich. Über die Ergebnisse dieser direkten Messung und die zeitliche Veränderung der gemessenen K^* -Werte soll im folgenden berichtet werden.

2. Herstellung der Schichten und Messung ihrer Anisotropiekonstanten

Als Unterlagen für die aufgedampften Schichten wurden optisch polierte kreisförmige Glasplättchen (Durchmesser 15 mm) verwendet, die sorgfältig

*) Phys. Inst. d. Tschechoslowakischen Akademie d. Wissenschaften, Prag.

**) Inst. f. Magn. Werkstoffe d. DAW, Jena.

¹⁾ D. O. Smith, J. Appl. Phys. **29**, 264 (1958).

²⁾ C. D. Olson u. A. V. Pohm, J. Appl. Phys. **29**, 274 (1958).

³⁾ I. N. Mitchell, J. Appl. Phys. **29**, 286 (1958).

chemisch gereinigt worden waren. Der Druck betrug vor dem Aufdampfen 10^{-6} bis 10^{-5} Torr, während des Aufdampfens etwa 10^{-4} Torr. Die ferromagnetischen Stoffe wurden von einer W-Spirale aus von unten nach oben verdampft. Die 8 cm über der Spirale in einem Thermostaten angeordneten Unterlagen konnten gleichmäßig erhitzt werden. Um auch beim Aufdampfen auf ungeheizte Unterlage ein gutes Anhaften der Schicht zu erreichen, wurden zum Teil die Glasplättchen erst geheizt und mit einer dünnen Al-Schicht bedampft; erst nach dem Abkühlen auf Zimmertemperatur folgte das Aufdampfen der ferromagnetischen Schicht. Zum Schutze vor Oxydation wurde diese unmittelbar danach mit einer Al-Schicht bedampft. Diese Schutzschicht diente gleichzeitig zum Bedecken der Stufe, die auf einer Vergleichsprobe erzeugt worden war, um die Schichtdicke durch Vielfachinterferenz bestimmen zu können.

Die Unterlagen der elektrolytisch hergestellten Schichten waren zentrisch durchbohrte Kreisscheiben (Außendurchmesser 16,5 mm) aus reinstem polykristallinen Elektrolytkupfer, die geätzt und anschließend konzentrisch poliert worden waren. Auf diese Weise ließen sich gerichtete Kratzer in der Unterlage vermeiden, die eine einachsige (Form-) Anisotropie der darauf niedergeschlagenen Schichten bedingen würden. Der Elektrolyt bestand aus einer wäßrigen Lösung von 100 g/l Nickelsulfat, 50 g/l Nickelammonsulfat, 10 g/l Natriumsulfat und 15 g/l Borsäure. Die Schichten wurden bei Zimmertemperatur hergestellt. Die Stromdichte betrug $6,25 \cdot 10^{-3} \text{ A cm}^{-2}$. Die Bestimmung der Schichtdicke erfolgte nach dem Faradayschen Gesetz unter Berücksichtigung der experimentell ermittelten Stromausbeute (98%) bzw. in einem Fall durch eine quantitative chemische Analyse.

Sowohl beim Aufdampfen als auch bei der elektrolytischen Herstellung der Schichten wirkte ein Magnetfeld parallel zur Schichtebene.

Die Anisotropiekonstante K^* wurde nach der Drehmomentenmethode in einer Torsionsfadenapparatur bei einem Magnetfeld von 6 kOe bestimmt. Die Messung der dabei auftretenden kleinen Torsionswinkel erfolgte mit einer optischen Methode. Der Anisotropiemesser besitzt eine Empfindlichkeit von $10^{-3} \text{ dyn cm/Skt.}$

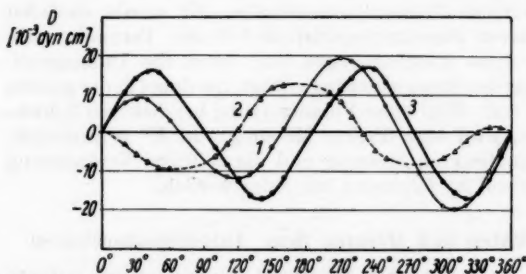


Abb. 1. Drehmomentenkurven einer 940 Å dicken auf geheizte Unterlage aufgedampften Nickelschicht. 1 Drehmomentenkurve ohne Korrektur; 2 Leereffektkurve; 3 korrigierte Drehmomentenkurve der Schicht

und zur Korrektur verwendet werden. Eine Kurve mit besonders kleinem Drehmoment ist als Beispiel in Abb. 1 angegeben.

Un
anisot
Schiel
lagen
mit H
lytisch
Aus d
im An
die Sch
lag. I
Anisot
der da
macht

K⁴
ten S
<0,5
lytisch
Meßer
der A
samml
geteilt

Be
densel
piekon
blieb,
kleine
stellun
rasche
tropie
gefunde

De
Herste
bei Zi
Werte

4)
Z. Mál
5)
O. Ste
6)
(1959).
7)
(1959).
8)
Phys. 2

Bei dieser großen Empfindlichkeit werden meßbare Drehmomente auch durch die Halterung der Proben und eventuelle Verunreinigungen hervorgerufen. Daher mußte im allgemeinen jeweils auch eine Kurve ohne Probe (Leereffekt) gemessen

Um eine die Messung verfälschende Form-anisotropie zu vermeiden, wurden bei der Schichtherstellung die Seitenflächen der Unterlagen abgedeckt, und zwar beim Aufdampfen mit Hilfe geschliffener Blenden, bei der elektrolytischen Herstellung mit einer Lackschicht. Aus dem gleichen Grunde mußte die Probe so im Anisotropiemesser angebracht werden, daß die Schichtnormale parallel zur Torsionsrichtung lag. Nähere Angaben über die Methode der Anisotropiemessung sowie eine Abschätzung der dabei auftretenden Fehler werden in ⁴⁾ gemacht.

3. Ergebnisse der K^* -Messungen

K^* -Werte wurden gemessen an aufgedampften Schichten von Permalloy (77% Ni, <0,5% Mo) und Nickel (99%) sowie an elektrolytisch niedergeschlagenen Nickelschichten. Die Meßergebnisse und einige Abschätzungen aus der Anisotropiefeldstärke sind in Tab. 1 zusammengestellt [dabei wurden die in ⁵⁻⁷⁾ mitgeteilten Werte mit benutzt].

4. Die zeitliche Änderung der Anisotropiekonstanten

Bei Wiederholung der Messungen von K^* an denselben Proben zeigte sich, daß die Anisotropiekonstante zeitlich nicht immer konstant blieb, sondern manchmal größere, manchmal kleinere Werte als unmittelbar nach der Herstellung annahm. Dieser Effekt war überraschend, da bisher Veränderungen der Anisotropie nur bei wesentlich höheren Temperaturen gefunden worden waren [³⁾ u. ⁸⁾].

Deshalb wurden mehrere Proben von der Herstellung an in definierten Magnetfeldern H , bei Zimmertemperatur gelagert und ihre K^* -Werte wiederholt gemessen.

⁴⁾ W. Schüppel, O. Stemme, W. Andrä u. Z. Málek, *Fiz. met. i metalloved.* (im Druck).

⁵⁾ W. Andrä, Z. Málek, W. Schüppel u. O. Stemme, *Naturwiss.* **46**, 257 (1959).

⁶⁾ O. Stemme u. W. Andrä, *Naturwiss.* **46**, 352 (1959).

⁷⁾ W. Schüppel u. Z. Málek, *Naturwiss.* **46**, 423 (1959).

⁸⁾ H. J. Williams u. R. C. Sherwood, *J. App. Phys.* **28**, 548 (1957).

Tabelle 1

Material	Art der Herstellung	Temperatur der Unterlage [°C]	Magn. Feldstärke bei der Herstellung [Oe]	Art der Messung	K^* [10 ³ erg · cm ⁻³]
83% Ni, 17% Fe	aufgedampft	erhöht, aber nicht angegeben.	≠ 0 (n. angegeben.)	indirekt ¹⁾	0,8
82% Ni, 18% Fe	aufgedampft	300	25—90	indirekt ²⁾	0,9 u. 1,5
82% Ni, 18% Fe	aufgedampft	300	30	indirekt ³⁾	1,3
77% Ni, 22% Fe	aufgedampft	300	210	direkt	0,8—1,3
77% Ni, 22% Fe	aufgedampft	25—50	170—330	direkt	1,7—5,0
99% Ni	aufgedampft	300	210	direkt	0,2—0,9
99% Ni	aufgedampft	25	210	direkt	3,2—7,2
99,9% Ni	elektrolyt.	25	5—3500	direkt	2,0—5,0

Abb. 2 enthält Meßergebnisse von Schichten, die auf ungeheizte Unterlagen aufgedampft worden waren. Von zwei gleichzeitig hergestellten Permalloyschichten ($d = 540 \text{ \AA}$) befand sich die eine (Kurve 3) nach der ersten

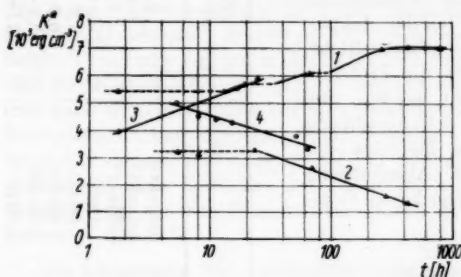


Abb. 2. Zeitliche Änderung der Anisotropiekonstanten K^* von auf ungeheizte Unterlagen aufgedampften Schichten. 1 und 2 Nickelschichten aufbewahrt im Magnetfeld H_i parallel (1) oder senkrecht (2) zur Vorzugsachse; 3 und 4 Permalloyschichten aufbewahrt im Magnetfeld H_i parallel (3) oder senkrecht (4) zur Vorzugsachse. Voll gezeichnete Kurven entsprechen dem Sättigungsfeld, gestrichelte Kurven wesentlich kleinerem Feld H_i .

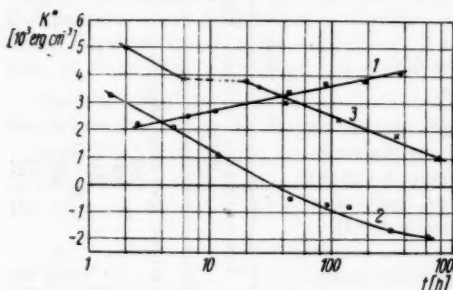


Abb. 3. Zeitliche Änderung der Anisotropiekonstanten K^* von elektrolytisch hergestellten Nickelschichten. 1 und 2 aufbewahrt im parallelen (1) bzw. senkrechten (2) Feld H_i ; 3 (voll) magnetisiert zur Sättigung ($H_i = 6000 \text{ Oe}$) senkrecht zur Vorzugsachse und abgeschirmt aufbewahrt; 3 (gestrichelt) magnetisiert im schwachen Feld ($H_i = 40 \text{ Oe}$) senkrecht zur Vorzugsachse und abgeschirmt aufbewahrt.

ändert sogar ihr Vorzeichen, so daß sich die Vorzugsachse um 90° dreht. Eine dritte 1000 \AA dicke Nickelschicht wurde nach der ersten Messung senkrecht zur Vorzugsachse magnetisiert (im Feld 6 kOe) und abgeschirmt ($H_i < 0.1 \text{ Oe}$) gelagert. Ihre zeitliche Änderung (Kurve 3) gleicht der von Kurve 2, jedoch

⁹⁾ Die Ribildung wurde hierbei durch eine aufgedampfte Al-Zwischenschicht verhindert, wie in Abschnitt 2 beschrieben ist.

K^* -Messung in einem Magnetfeld ($H_i = 220 \text{ Oe}$) parallel zur Vorzugsachse, die andere (Kurve 4) in einem Magnetfeld senkrecht zur Vorzugsachse. Die Messungen an diesen beiden Proben mußten wegen Ribildung in den Schichten abgebrochen werden. Entsprechende Versuche wurden mit Nickelschichten ($d = 1120 \text{ \AA}$) vorgenommen (Kurve 1 und 2), die auf ungeheizte Unterlagen aufgedampft worden waren⁹⁾. Hierbei stellte sich jedoch erst dann eine Änderung von K^* ein, wenn das bei der Lagerung wirkende Magnetfeld H_i stärker als 1000 Oe war. Schichten, die auf geheizte Unterlagen aufgedampft worden waren, zeigten innerhalb der Meßgenauigkeit keine zeitliche Veränderung der K^* -Werte.

Die Messungen an den elektrolytisch hergestellten Schichten sind in Abb. 3 wiedergegeben. Von zwei 1000 \AA dicken Nickelschichten wurde die eine nach der ersten K^* -Messung in einem Magnetfeld ($H_i = 800 \text{ Oe}$) parallel zur Vorzugsachse, die andere senkrecht zur Vorzugsachse aufbewahrt. Im ersten Fall (Kurve 1) nimmt K^* zu; im zweiten Fall (Kurve 2) sinkt die Anisotropiekonstante und

nur dar
diese S
aufbew

Aus

Die

entspre

Mehrbr

Nickel

lagen

wie be

Aus

liche

gedam

Magne

Zur

wurde

zeigte

währen

Eine s

die Pr

äußere

große

bei de

Arbeit

Nicke

feldst

Kurve

nicht

ordnu

Es

gedam

1500

blieb.

werde

heizte

verän

heizte

berich

D

Erklä

daß

rung

zwise

linie

nur dann, wenn die Aufmagnetisierung in starken Feldern erfolgt war. Wurde diese Schicht in einem Feld von 40 Oe magnetisiert und dann abgeschirmt aufbewahrt, so bleibt K^* annähernd konstant (gestrichelter Teil der Kurve 3).

5. Diskussion der Ergebnisse

Aus den Ergebnissen nach Abschnitt 3 erkennt man folgendes:

Die indirekt bestimmten K^* -Werte von Permalloy stimmen gut mit den entsprechenden direkt gemessenen Werten überein, obwohl sie meistens an Mehrbereichsschichten ermittelt wurden. Sowohl bei Permalloy als auch bei Nickel ist die Anisotropie größer, wenn die Schichten auf ungeheizte Unterlagen aufgedampft worden sind. Ihre K^* -Werte besitzen die gleiche Größe wie bei elektrolytisch abgeschiedenen Schichten.

Aus den in Abschnitt 4 angeführten Untersuchungen folgt, daß die zeitliche K^* -Änderung bei solchen Schichten, die auf ungeheizte Unterlage aufgedampft oder elektrolytisch abgeschieden worden waren, von der Lage der Magnetisierung bezüglich der Vorzugsachse abhängt.

Zur Deutung der Feldstärkeabhängigkeit der K^* -Änderung in Abb. 2 wurden die Hystereseschleifen der aufgedampften Proben gemessen¹⁰⁾. Dabei zeigte sich, daß die Permalloyschichten bereits bei etwa 30 Oe gesättigt sind, während bei den Nickelschichten erst bei mehr als 500 Oe Sättigung eintritt. Eine starke zeitliche Änderung der Anisotropie tritt also nur dann auf, wenn die Proben nahezu gesättigt sind. Es ist hierbei jedoch die Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes H_z nicht erforderlich, sobald die Proben eine genügend große relative Remanenz I_r/I_s besitzen. Das beweist die Kurve 3 in Abb. 3, bei der die Schicht im Remanenzzustand aufbewahrt wurde. Wie aus anderen Arbeiten bekannt ist¹¹⁾, beträgt bei solchen elektrolytisch niedergeschlagenen Nickelschichten die relative Remanenz 80 bis 100%, wenn die Sättigungsfeldstärke genügend hoch gewählt wird. Die beim gestrichelten Teil der Kurve 3 in Abb. 3 angewandte Feldstärke von etwa 40 Oe genügt sicher nicht zur Sättigung, da die Koerzitivkraft solcher Schichten in der Größenordnung von 100 Oe liegt.

Es ist bemerkenswert, daß bei Schichten, die auf geheizte Unterlage aufgedampft worden waren, auch unter dem Einfluß starker Felder ($H_z \approx 1500$ Oe) K^* bei Zimmertemperatur innerhalb der Meßgenauigkeit konstant blieb. Da bei diesen Feldstärken mit einer Sättigung der Schichten gerechnet werden muß, scheint ein wesentlicher Unterschied der Anisotropien bei geheizter und bei ungeheizter Unterlage zu bestehen. Bei höheren Temperaturen verändert sich jedoch die Anisotropie auch bei solchen Schichten, die auf geheizte Unterlagen aufgedampft worden sind, wie andere Autoren [3) u. 8)] berichtet haben.

Die vorliegenden Ergebnisse reichen noch nicht aus, um eine eindeutige Erklärung der Vorgänge zu erlauben. Vorläufig benutzen wir die Vorstellung, daß zwischen den einzelnen Atomen des ferromagnetischen Gitters und Störungen eine Wechselwirkung besteht, deren Energie pro Paar vom Winkel zwischen der Richtung der spontanen Magnetisierung und der Verbindungslinie des Paares abhängt. Durch Diffusion der beteiligten Partner kann sich

¹⁰⁾ H. Gengnagel, private Mitteilung.

¹¹⁾ W. Ruske, Ann. Physik (7) 2, 274 (1958).

eine pauschale Vorzugslage parallel zur spontanen Magnetisierung ausbilden. Diese Vorstellungen entsprechen denen der „Orientierungsüberstruktur“¹²⁾ und werden durch die bisherigen Ergebnisse gestützt. Weitere Untersuchungen sind im Gange.

6. Zusammenfassung

Es wurden die ersten direkten Messungen der Konstanten K^* der einachsigen magnetischen Anisotropie an aufgedampften Permalloy- und Nickelschichten und an elektrolytisch hergestellten Nickelschichten berichtet. Für die auf geheizte Unterlagen aufgedampften Permalloyschichten besteht gute Übereinstimmung mit den indirekt gemessenen¹⁻³⁾ K^* -Werten. Die Anisotropie der auf ungeheizte Unterlage aufgedampften Permalloy- und Nickelschichten ist systematisch größer als bei Verwendung geheizter Unterlagen und entspricht derjenigen der elektrolytisch niedergeschlagenen Nickelschichten.

Werden Schichten, die auf ungeheizter Unterlage hergestellt worden sind, bis nahe zur Sättigung parallel bzw. senkrecht zur Vorzugsrichtung magnetisiert, so nimmt die Anisotropie auch bei Zimmertemperatur im Laufe der Zeit annähernd exponentiell zu bzw. ab, wenn der Wert der Magnetisierung nahezu gleich der Sättigungsmagnetisierung bleibt. Schichten, die auf geheizter Unterlage (300° C) hergestellt worden sind, zeigen derartige Veränderungen bei Zimmertemperatur nicht.

Dem Fotopapierwerk VEB Vephota, Dresden, möchten wir für die Überlassung von Spezial-Fotopapier danken, das bei der Schichtdickenbestimmung nach der Vielfachinterferenzmethode eine höhere Genauigkeit zuließ.

Für ihre Hilfe bei den Messungen sind wir Fräulein Chr. Hermann sehr zu Dank verpflichtet.

¹²⁾ L. Néel, J. Physique Radium 15, 225 (1954).

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, und

Prag, Physikalisches Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 19. Mai 1959.

Es
Eisen
mit an
in Bet
180°-B
Nickel
energie
wände
Nickel

Bek
sierung
Pole in
kompo
die Be

Die
renden
Magnet
richtung
wand
Blochw
kristall
Wände
steht¹⁾

Für
vor un
erster
grale u

Im
sierung

¹⁾ C
²⁾ S
³⁾ F

Energie der Blochwände in Eisen und Nickel

Von Ladislav Špaček

Mit 10 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wurde die Energiedichte für alle möglichen Lagen der Blochwände in Eisen und Nickel berechnet, wobei Blochwände zwischen Bezirken sowohl mit antiparallelen als auch mit nicht antiparallelen Magnetisierungsvektoren in Betracht gezogen wurden. Die Rechnungen erstrecken sich auf 90°- und 180°-Blochwände in Eisen und auf 70°, 110°- und 180°-Blochwände in Nickel. Alle Berechnungen wurden bis zur zweiten Näherung der Kristallenergie durchgeführt. Zuletzt wird auch auf mögliche Lagen der Blochwände eingegangen, die der vorteilhaftesten Bezirksstruktur in Eisen und Nickel entsprechen.

Einleitung

Bekanntlich trennen die Blochwände Bezirke verschiedener Magnetisierungsrichtungen. Die Bedingung für die Abwesenheit freier magnetischer Pole im Innern des ferromagnetischen Materials verlangt, daß die Normalkomponente der Magnetisierung an der Blochwand stetig ist, woraus auch die Bedingung für das Minimum der Energie folgt.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Blochwand in der Winkelhalbierenden des Winkels liegt, den die beiden angrenzenden Richtungen leichter Magnetisierbarkeit miteinander einschließen. Liegt eine antiparallele Ausrichtung der Magnetisierungsvektoren vor, dann sind sie überall der Blochwand parallel (180°-Wände). Bei der Berechnung der Energie einer solchen Blochwand wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß die Blochwand in einer kristallographischen Hauptebene liegt, oder daß sie, wie im Falle der 90°-Wände in Eisen, senkrecht zur Ebene beider Magnetisierungsrichtungen steht¹⁾.

Für Blochwände allgemeiner Lage liegen nur wenige Berechnungen vor und dann auch nur für Spezialfälle und für die Kristallenergie nur in erster Näherung²⁾, weil eine exakte Berechnung der betreffenden Integrale unmöglich und die numerische Auswertung sehr mühsam ist.

Der Energieausdruck für die Kristallenergie

Im anisotropen Fall läßt sich stets eine solche Richtung für die Magnetisierung finden, daß der Ausdruck für die Energie der Blochwand ein Minimum

¹⁾ Ch. Kittel, Rev. mod. Physics **21**, 541 (1949).

²⁾ S. Chikazumi u. K. Suzuki, J. phys. Soc. Japan **10**, 523 (1955).

³⁾ R. M. Bozorth, Ferromagnetism, D. Van Nostrand Comp., New York 1951.

wird. Für Eisen ist es die Richtung $\langle 100 \rangle$ und für Nickel die Richtung $\langle 111 \rangle$. Diese Minimumenergie werden wir allen unseren Berechnungen als Nullenergie zugrunde legen, so daß sie als Grenzbedingung auftritt.

Die allgemein gültige Beziehung für die Kristallenergie lautet:

$$\varepsilon_a = K_0 + K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) + K_2 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2)$$

oder abgekürzt:

$$\varepsilon_a = K_0 + K_1 \pi_1 + K_2 \pi_2. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck ist je nach dem Wert der Anisotropiekonstanten K_0 , K_1 , K_2 bis zur zweiten Näherung richtig. Die α_i in Formel (1) sind die Richtungscosinus in bezug auf die $\langle 100 \rangle$ -Richtungen im kubischen Kristallsystem. Die genauen Werte dieser Konstanten sind nicht bekannt, man verwendet jedoch die folgenden hinreichend genauen Näherungswerte:

Für Eisen: $K_0 = 0 \text{ erg cm}^{-3}$	Für Nickel: $K_0 = 0,94815 \text{ erg cm}^{-3}$
$K_1 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ erg cm}^{-3}$	$K_1 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ erg cm}^{-3}$
$K_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ erg cm}^{-3}$	$K_2 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ erg cm}^{-3}$

Die Austauschenergie

Diese Energie bildet den zweiten Teil der gesamten Blochwandenergie und rührt von der nichtparallelen Einstellung der Spinrichtungen der Atome her. Die genaue Berechnung dieser Energie ist schwierig, aber für unseren Fall benutzen wir eine ausreichende Näherung, welche sich aus dem Ising-Modell ergibt¹⁾:

$$\varepsilon_{\text{ex}} = A [(\text{grad } \alpha_1)^2 + (\text{grad } \alpha_2)^2 + (\text{grad } \alpha_3)^2]. \quad (2)$$

A bedeutet die durch die Curie-Temperatur ausdrückbare Konstante:

$$A = \frac{|k S^2 \Theta|}{a} \ln \frac{2Z}{Z-2}, \quad (3)$$

worin bezeichnen: k die Boltzmannsche Konstante, a die Gitterkonstante, Θ die Curie-Temperatur, Z die Anzahl der Nachbaratome, S die Gesamtspinzahl. ($2S$ ist theoretisch die Zahl der nichtparallelen Spinrichtungen im d -Zustand und ist 2,22 für Eisen, 1,72 für Kobalt und 0,61 für Nickel.)

Der Berechnung haben wir folgende Werte zugrunde gelegt:

Für Eisen: $\Theta = 1043^\circ \text{K}$, $a = 2,86 \cdot 10^{-8}$, $Z = 8$ und $S = 1$.

Für Nickel: $\Theta = 631^\circ \text{K}$, $a = 3,52 \cdot 10^{-8}$, $Z = 12$ und $S = 0,5$.

Mit diesen Werten erhalten wir für die Austauschenergie:

$$A_{\text{Fe}} \cong 2 \cdot 10^{-6} \text{ erg/cm}^3 \quad A_{\text{Ni}} \cong 0,11 \cdot 10^{-6} \text{ erg/cm}^3.$$

Die Blochwand

Die Energie der Blochwand ist durch den Unterschied der Richtungen des Magnetisierungsvektors in den beiden durch die Blochwand getrennten Be-

zirkeln bestimmt. Wir nehmen an, daß die Blochwand in der x' -, y' -Ebene liegt. Die Polarkoordinate ϑ des Magnetisierungsvektors bleibt also beim Überschreiten der Blochwand ungeändert, so daß als einzige Veränderliche die Koordinate φ auftritt. Die $\langle 100 \rangle$ -Richtungen, auf welche sich die α_i in Formel (1) und (2) beziehen, haben jedoch im allgemeinen eine andere Orientierung. Im folgenden seien die Koordinaten auf das Koordinatensystem der Blochwand bezogen. Dann gelten die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \alpha'_2 &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \alpha'_3 &= \cos \vartheta.\end{aligned}\quad (4)$$

Die Austauschenergie kann nun sofort nach (2) in bezug auf die Koordinaten der Blochwand berechnet werden. Als einzige Veränderliche treten z' und φ auf. Nach (4) ergibt sich nun:

$$\text{grad } \alpha'_1 = -\vec{k} \frac{\partial \alpha'_1}{\partial z} = -\vec{k} \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\text{grad } \alpha'_2 = \vec{k} \frac{\partial \alpha'_2}{\partial z} = \vec{k} \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5)$$

und mithin:

$$\varepsilon_{\text{ex}} = A \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \varepsilon_{\text{ex}}(\vartheta, \varphi'). \quad (6)$$

Die Kristallenergie ist eine Funktion von ϑ und φ , mit der einzigen Veränderlichen φ . Die Gesamtenergie der Blochwand pro cm^2 beträgt also

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varepsilon_a(\vartheta, \varphi) + \varepsilon_{\text{ex}}(\vartheta, \varphi')] dz.$$

ε_a und ε_{ex} ergeben sich durch Nullsetzen der Variation. Ein erstes Integral der Eulerschen Gleichungen lautet offenbar:

$$\varepsilon_a + \varepsilon_{\text{ex}} - \varphi' \frac{\partial \varepsilon_{\text{ex}}}{\partial \varphi'} = c,$$

mit den Randbedingungen $\varphi' = 0$, $\varepsilon_{\text{ex}} = 0 = \varepsilon_a$, $c = 0$ für $z \rightarrow \infty$.

Hieraus ergibt sich mit (6)

$$\varepsilon_a + \varepsilon_{\text{ex}} - 2 \varepsilon_{\text{ex}} = 0,$$

was überall gültig sein muß. Also folgt

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\text{ex}}. \quad (7)$$

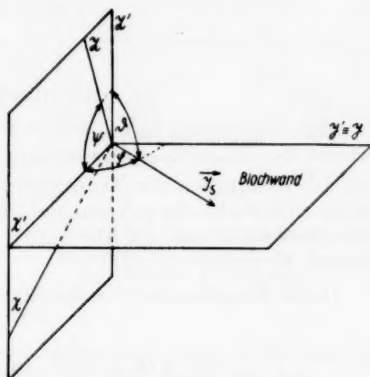


Abb. 1. Die Beziehung zwischen den Koordinaten der Blochwand x' , y' , z' und den Richtungen $\{100\}$ x , y , z , bei 180° -Blochwand in Eisen

Weiter erhalten wir aus (6) mit Rücksicht auf (7):

$$dz = \sqrt{\frac{A}{\varepsilon_a}} \sin \vartheta \, d\varphi$$

und daraus schließlich die Grundgleichung für alle weiteren Berechnungen der Blochwandenergie:

$$\varepsilon = 2 \sqrt{A} \sin \vartheta \int_{-\beta}^{+\beta} \sqrt{\varepsilon_a} \, d\varphi. \quad (8)$$

180°-Blochwand in Eisen

Diese Blochwand muß eine der $\langle 100 \rangle$ -Richtungen enthalten und zwar jene, welche der Magnetisierungsrichtung in den angrenzenden Bezirken parallel ist. Die Richtungen der Magnetisierung seien $[0 \ 1 \ 0]$ und $[0 \ \bar{1} \ 0]$. Die Blochwand enthält also die y -Achse und ist um diese drehbar. Der Winkel zwischen der Blochwand und der Ebene $(0 \ 0 \ 1)$ sei mit ψ bezeichnet. Außerdem gilt immer: $\vartheta = \pi/2$.

Durch Einsetzen der entsprechenden Konstanten in (8) erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{42 \pi_1 + 15 \pi_2} \, d\varphi, \\ \varepsilon &= 0,5656 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{42 \pi_1 + 15 \pi_2} \, d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Um die Ausdrücke für π_1 und π_2 in (1) auszuwerten, müssen wir noch die Abhängigkeit der α_i von ψ kennen, welche durch die folgenden Beziehungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \psi \cos \varphi, \\ \alpha_2 &= \sin \varphi, \\ \alpha_3 &= \cos \psi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Auswertung von (9) ist mit Rücksicht auf (10) mühsam und erfolgt im allgemeinen numerisch. Die Resultate der Rechnung sind in Tab. 1 und in Abb. 2 (Kurve a) wiedergegeben.

Tabelle 1

ψ°	0; 90	10; 80	15; 75	22; 68	30; 60	40; 50	45
$\varepsilon \text{ erg/cm}^2$	1,8232	1,9809	2,0882	2,2552	2,4209	2,5436	2,5600

Wir sehen, daß die energetisch vorteilhafteste Lage der Blochwand mit der $\{1 \ 0 \ 0\}$ -Ebene zusammenfällt, während die $\{1 \ 1 \ 0\}$ -Ebenen den höchsten Energieinhalt aufweisen, wobei die Energiedifferenz zwischen beiden Lagen

40,41% der Minimalenergie beträgt. Die Kurve *a* in Abb. 2 ist symmetrisch in bezug auf die Punkte $\psi = 0$ und $\psi = \pi/4$. Eine mögliche Einstellung der Blochwand zeigt Abb. 3.

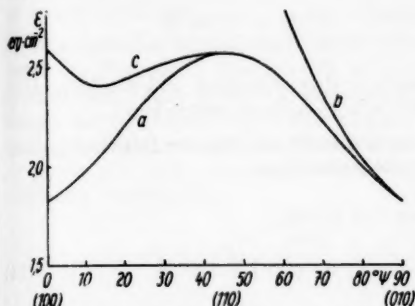


Abb. 2. Energie der 180°-Blochwand in Eisen in Abhängigkeit von der Neigung zur {100}-Ebene (Kurve *a*)

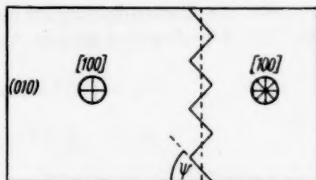


Abb. 3. Eine Lage der 180°-Zick-Zack-Blochwand in Eisen, die der Kurve *b* in Abb. 2 entspricht

Alle anderen Einstellungen der Blochwand (eine davon ist in der Abbildung angedeutet) sind energetisch unvorteilhaft, da ihre durch die Formel

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon(\psi)}{\sin \psi} \quad (11)$$

gegebene Energie für alle ψ immer größer als die bei $\pi/2$ ist (Kurve *b* in Abb. 2).

Die zweite mögliche Einstellung in bezug auf den Symmetriepunkt $\psi = \pi/4$ ist in Abb. 4 angegeben. Die Energie ist durch den Ausdruck

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon \psi}{\cos(\pi/4 - \psi)} \quad (12)$$

gegeben und die entsprechende Kurve in Abb. 2 mit *c* bezeichnet. Sie hat ein Minimum entsprechend 2,41 erg cm⁻² bei $\psi = 14^\circ$. Dadurch ist also ein weiterer möglicher Zustand gekennzeichnet, der aber wegen der Energiedifferenz in bezug auf das Minimum bei $\psi = 90^\circ$ sehr unwahrscheinlich ist.

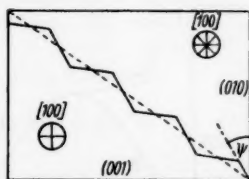


Abb. 4. Eine mögliche Lage der 180°-Zick-Zack-Blochwand in Eisen, die der Kurve *c* in Abb. 2 entspricht. Der Fall $\psi = 14^\circ$ gibt hierbei die niedrigste Energie

180°-Blochwand in Nickel

Diese Blochwand muß eine der Richtungen $\langle 111 \rangle$ enthalten, ist um diese Achse drehbar und wir bezeichnen mit ψ den Winkel zwischen der Blochwand und der $(0\bar{1}1)$ -Ebene. Setzen wir die entsprechenden Konstanten in (8)

ein, so erhalten wir

$$\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{0,11} \cdot 10^{-3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{K_0 + K_1 \pi_1 + K_2 \pi_2} d\varphi, \quad (13)$$

$$\varepsilon = 0,0664 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{0,94815 - 3,4 \pi_1 + 5,0 \pi_2} d\varphi.$$

Dieses Integral ist nicht in bezug auf $\varphi = 0$ symmetrisch und die Integration ist daher über den ganzen Bereich $\langle -\pi/2, +\pi/2 \rangle$ zu erstrecken.

Für die Richtungscosinus ergeben sich nicht so einfache Beziehungen wie in (10). Die diesbezüglichen Ausdrücke lauten jetzt:

$$\alpha_1 = \sqrt{2/3} \cos \psi \cos \varphi - \sqrt{1/3} \sin \varphi$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{2/3} \cos (\pi/3 + \psi) \cos \varphi - \sqrt{1/3} \sin \varphi \quad (14)$$

$$\alpha_3 = -\sqrt{2/3} \cos (\pi/3 - \psi) \cos \varphi - \sqrt{1/3} \sin \varphi.$$

Alle $\{110\}$ -Ebenen sind gleichberechtigt und da sie untereinander den Winkel $\pi/3$ einschließen, muß auch die Energie in bezug auf diese eine Periodizität aufweisen. Die Berechnung der Energie erfolgte nach (11) durch numerische Integration und das Ergebnis ist in Tab. 2 und Abb. 5 (Kurve a) für eine Periode angegeben.

Tabelle 2

ψ°	0; 60	8; 52	15; 45	23; 37	30
$\varepsilon \text{ erg/cm}^2$	0,0903	0,0923	0,0949	0,0969	0,0974

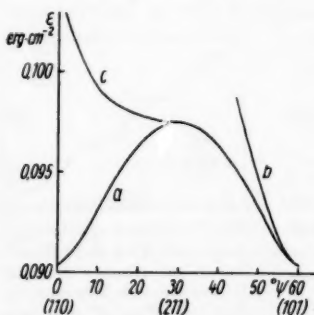


Abb. 5. Energie der 180°-Blochwand in Nickel, in Abhängigkeit von der Neigung zur $\{110\}$ -Ebene (Kurve a)

Die vorteilhafteste Lage der Blochwand fällt also mit den $\{110\}$ -Ebenen zusammen, während die höchste Energie jene Ebenen aufweisen, welche mit $\{100\}$ einen Winkel von 30° einschließen, was sehr angenähert für die $\{112\}$ -Ebenen zutrifft. Die Energieerhöhung beträgt hier nur 7,86%. In Abb. 5 sind die zu Abb. 2 analogen Kurven eingezeichnet.

Wie ersichtlich hat die Kurve b nur ein einziges Minimum, so daß für Nickel die 180°-Blochwände ausschließlich in den $\{110\}$ -Ebenen liegen. Dies bedeutet einen Unterschied gegenüber Eisen, wo auch Blochwände, wie in Abb. 4 möglich sind.

90°-Blochwand in Eisen

Für 90°-Blochwände liegt eine ganz andere Situation vor, was auch für alle nicht parallelen Blochwände gilt. Die allgemeine Orientierung der Bloch-

wand ist dadurch bestimmt, daß sie die Winkelhalbierende zwischen den beiden Richtungen leichter Magnetisierbarkeit enthalten muß. Für Eisen sind es also die Richtungen $\langle 110 \rangle$, um welche auch die Blochwand drehbar ist. Der Winkel zwischen der Ebene leichter Magnetisierbarkeit und der Blochwand sei mit ϑ bezeichnet.

Aus Gründen kristallographischer Symmetrie hat also der Energieausdruck die Periode π . Die Energie ist in bezug auf die Punkte 0, $\pi/2$ und π symmetrisch. Eine größere Schwierigkeit bei der Berechnung der Gesamtenergie der Blochwand ergibt sich nun aus dem Umstand, daß beim Einsetzen in die Grundgleichung (8) der Winkel ϑ und die Integrationsgrenze nicht überall gleich $\pi/2$ sind. Aus der Betrachtung eines Modells folgen aber leicht die folgenden Beziehungen:

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{2 - \sin^2 \psi}}{2} \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 \psi}}. \quad (15)$$

Hier übergehen wir die umfangreichen numerischen Berechnungen nach Gl. (8). Aus der Literatur ist nur die Integration für spezielle Werte von ψ bekannt, wobei nur die erste Näherung für den Ausdruck der Kristallenergie ($\varepsilon_0 = K_1 \pi_1$) nach (1) verwendet wurde.

Ziehen wir auch noch die zweite Näherung in Betracht, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \sin \vartheta \cdot 2 \cdot \int_0^{\beta} \sqrt{K_1 \pi_1 + K_2 \pi_2} d\varphi \\ \varepsilon &= 0,5656 \sin \vartheta \int_0^{\beta} \sqrt{42 K_1 + 15 K_2} d\varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

worin ϑ und β durch (15) bestimmt sind. Die Richtungscosinus für die Ausdrücke für π_1 und π_2 sind in bekannter Weise zu bestimmen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{1/2} \cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi - \sqrt{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi + \cos^2 \vartheta \\ \alpha_2 &= \sqrt{1/2} \cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \sqrt{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi + \cos^2 \vartheta \\ \alpha_3 &= -\sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (17)$$

Hiermit ergibt sich nach (16) die Energie der 90° -Blochwand für Eisen. Das Ergebnis ist in Tab. 3 und in Abb. 6 (Kurve a) angegeben. Zum Vergleich wurde auch noch die Energie ε' berechnet, welche man erhält, wenn man in dem Ausdruck für die Anisotropie-Energie nur die erste Näherung beibehält. (In Abb. 6 punktiert angegeben.)

Tabelle 3

ψ°	0	25	40	45	55	60	65	70	75	83	90
ε	0,930	0,946	1,003	1,030	1,105	1,149	1,203	1,265	1,335	1,482	1,603
ε'	0,930	0,944	0,995	1,024	1,090	1,135	1,185	1,245	1,319	1,453	1,589

Der durch die Vernachlässigung der zweiten Näherung bedingte Fehler beträgt also nur etwa 1%. Das Energiemaximum tritt bei $\psi = \pi/2$, d. h. für $\{110\}$ -Ebenen auf. Die vorteilhafteste Lage der Blochwand fällt mit der Ebene zusammen, welche durch die beiden Magnetisierungsvektoren der angrenzenden Bezirke bestimmt wird. (Im allgemeinen sind es die $\{100\}$ -Ebenen.) In bezug auf diese Ebene erscheint die Energie bei $\psi = 90^\circ$ um 72,4% vergrößert.

Eine Kurve, welche der in den Abb. 2 und 5 mit „b“ bezeichneten entspricht, ist hier nicht einzuführen. Wenn eine Blochwand mit der Lage $\psi = 0$ möglich ist, so bewirkt eine jede andere Neigung eine Erhöhung der Gesamtenergie. Blochwände mit $\psi = 0$, können wir im Materialinneren erwarten. An der Oberfläche wäre eine solche Lage nicht stabil, da sie freie magnetische Pole zur Folge hätte.

Anders liegt der Fall für den zweiten Symmetriepunkt bei $\psi = 90^\circ$. Jede Neigung gegenüber $\psi = 90^\circ$ bedeutet eine Energierniedrigung der Blochwand, aber auch eine Vergrößerung der Fläche der Blochwand entsprechend

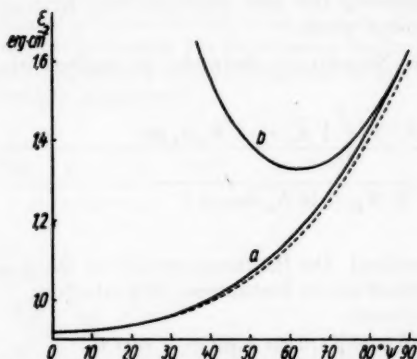


Abb. 6. Energie der 90° -Blochwand in Eisen, in Abhängigkeit von der Neigung zur $\{100\}$ -Ebene (Kurve a)

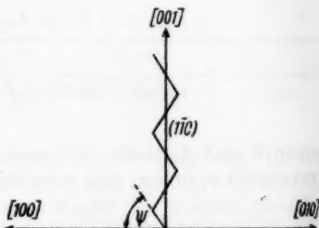


Abb. 7. Eine mögliche Lage der 90° -Blochwand in Eisen, die der Kurve b in Abb. 6 entspricht. Der Fall $\psi = 62^\circ$ gibt hierbei die niedrigste Energie

dem Faktor $\sin^{-1} \psi$. Diese Sachlage wird in Abb. 7 schematisch veranschaulicht. In Abb. 6 stellt die Kurve „b“ den Verlauf der Funktion $\varepsilon/\sin \psi$ dar. Ein Minimum ergibt sich für $\psi = 62^\circ$. In Abb. 7 sind für $\psi = 62^\circ$ in Wirklichkeit existierenden 90° -Blochwände angegeben, welche wir durch Anwendung der Kolloidtechnik an der Oberfläche sichtbar machen können.

70°- und 110°-Blochwände in Nickel

Für Nickel sind die $\langle 111 \rangle$ -Achsen die Richtungen leichter Magnetisierbarkeit. Sie schließen untereinander die Winkel $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$ und $\arccos(-1/3)$ ein, welche wir der Einfachheit halber im folgenden kurz mit 70°

und 110° bezeichnen wollen, obwohl wir den Berechnungen die genauen Werte zugrunde legen.

Hier sind nur zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: Die Blochwand kann entweder die Winkelhalbierende des einen oder des anderen Winkels enthalten. Sie ist also entweder um die Achse $\langle 1\ 0\ 0 \rangle$ oder um die Achse $\langle 1\ 1\ 0 \rangle$ drehbar. Die erste Möglichkeit der Drehung bezeichnen wir als Typus I, die zweite Möglichkeit als Typus II. Den Winkel, welchen die Blochwand mit der Ebene der Magnetisierungsvektoren einschließt, werden wir wie bisher mit ψ bezeichnen.

Typus I. — 70° -Blochwand

Die Grundgleichung (8) nimmt in diesem Fall die Form an:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2 \cdot \sqrt{0,11} \cdot 10^{-3} \cdot \sin \vartheta \int_{-\beta}^{+\beta} \sqrt{K_0 + K_1 \pi_1 + K_2 \pi_2} d\varphi \\ \varepsilon &= 0,1328 \sin \vartheta \int_0^\beta \sqrt{0,94815 - 3,4 \pi_1 + 5,0 \pi_2} d\varphi.\end{aligned}\quad (18)$$

Die Winkel ϑ und β folgen aus den Beziehungen

$$\cos \vartheta = \sqrt{2/3} \sin \psi \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \sin^2 \psi}}. \quad (19)$$

Für die Richtungs cosinus, welche in die Ausdrücke für die π_1 und π_2 einzusetzen sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos(\psi - \pi/4) \sin \vartheta \cos \varphi + \sin(\psi - \pi/4) \cos \vartheta \\ \alpha_2 &= -\sin(\psi - \pi/4) \sin \vartheta \cos \varphi + \cos(\psi - \pi/4) \cos \vartheta \\ \alpha_3 &= \sin \vartheta \sin \varphi.\end{aligned}\quad (20)$$

Unter Benützung von (20) und (19) können wir die Integration von (18) ausführen. Das Ergebnis ist in Tab. 4 enthalten und in Kurve „a“ der Abb. 8 dargestellt.

Tabelle 4

ψ°	0	15	20	30	40	50	60	67	75	90
ε	0,0174	0,0184	0,0189	0,0202	0,0222	0,0255	0,0308	0,0355	0,0434	0,0640

Ähnlich wie bei Eisen ergibt sich eine günstige Lage der Blochwand für $\psi = 0^\circ$ und solche Blochwände sind im Materialinnern zu erwarten. In der Oberflächenschicht aber werden wir ähnliche Strukturen zu erwarten haben, wie sie in Abb. 7 schematisch für Eisen angegeben wurden. Sie sind wiederum durch den Ausdruck $\varepsilon/\sin \psi$ für die Energiedichte gegeben. In Abb. 8 ist die

Abhängigkeit der Energie einer Blochwand in Abhängigkeit vom Winkel ψ durch Kurve „b“ wiedergegeben. Diese Kurve hat ein Minimum bei $\psi = 48^\circ$, wodurch eine ausgezeichnete Lage der Blochwand vom Typus I gegeben ist. Dieser ausgezeichneten Lage entsprechen ungefähr die $\{100\}$ -Ebenen.

Ein Modell einer solchen „inneren“ Blochwand zwischen den Magnetisierungsvektoren $[111]$ und $[\bar{1}11]$ ist in Abb. 9 wiedergegeben. Trotzdem ist mit der Kolloidtechnik die Spur „a“ nicht als dunkel zu beobachten,

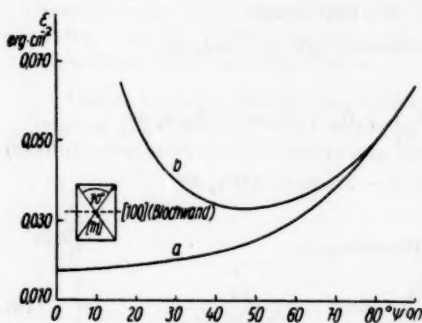


Abb. 8. Energie der 70°-Blochwand in Nickel, in Abhängigkeit von der Neigung zur $\{110\}$ -Ebene (Kurve a)

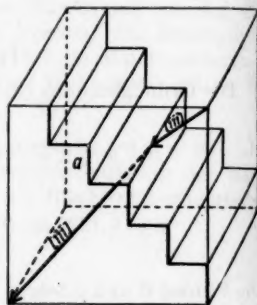


Abb. 9. Eine mögliche Lage der 70°-Zick-Zack-Blochwand in einem Nickel-Einkristall, die dem Falle niedrigster Energiedichte der Kurve b in Abb. 8 entspricht

sondern wie aus einer in der Abb. 9 angeführten Beobachtung hervorgeht, muß sie als hell erscheinen. Solche helle Spuren sind nun in der Tat auch auf $\{100\}$ -Ebenen von Nickel zu beobachten. (Siehe z. B. Abb. 13 in 4).)

II. Typus — 110°-Blochwand

Die Grundgleichung (8) lautet hier:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 4 \cdot \sqrt{0,11} \cdot 10^{-3} \sin \vartheta \int_0^\beta \sqrt{K_0 + K_1 \pi_1 + K_2 \pi_2} d\varphi \\ \varepsilon &= 0,1328 \sin \vartheta \int_0^\beta \sqrt{0,94815 - 3,4 \pi_1 + 5,0 \pi_2} d\varphi, \end{aligned} \quad (21)$$

worin π_1 und π_2 wiederum durch (1) auszudrücken sind. Für ϑ und β gelten die folgenden Beziehungen:

$$\cos \vartheta = \sqrt{1/3} \sin \vartheta \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{2}{3 - \sin^2 \psi}}. \quad (22)$$

4) T. Iwata u. M. Yamamoto, Sci. Repts. RITU 8, 293 (1956).

Die Richtungs cosinus α_i bestimmen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\sqrt{1/2} \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \sqrt{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi + \sqrt{1/2} \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_2 &= -\sqrt{1/2} \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi - \sqrt{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi + \sqrt{1/2} \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_3 &= \cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \sin \psi \cos \vartheta.\end{aligned}\quad (23)$$

Durch Einsetzen in (21) und Berücksichtigung von (22) erhalten wir das in Tab. 5 und in Kurve „a“ der Abb. 10 wiedergegebene Ergebnis der Rechnung.

Tabelle 5

ψ°	0	30	45	60	67	75	80	85	90
ε	0,0731	0,0682	0,0611	0,0503	0,0445	0,0393	0,0384	0,0408	0,0476

Die Abhängigkeit der Energiedichte vom Winkel ψ hat hier einen ganz anderen Verlauf als in den bisher betrachteten Fällen. Es ergibt sich ein Minimum bei $\psi = 80^\circ$. Ein gleiches Minimum weist auch die Kurve „b“ auf, welche gemäß der Beziehung $\varepsilon' = \varepsilon / \sin \psi$ den entsprechenden Kurven in früheren Abbildungen analog ist. Die Energiezunahme in bezug auf das Energieminimum beträgt 24% für $\psi = 90^\circ$ und 90,4% für $\psi = 0^\circ$.

Wie für den Fall der 90°-Blochwände in Eisen wurde auch hier die Möglichkeit einer zu $\psi = 90^\circ$ (Kurve b) oder $\psi = 0^\circ$ (Kurve c) symmetrischen Zick-Zack-Wand angedeutet. Ähnlich wie für Eisen (Abb. 6) hat auch hier die Kurve c kein Minimum. Es gibt also für Nickel sowohl im Materialinnern als auch in der Oberflächenschicht nur eine mögliche Lage der Blochwand vom Typus II. Sie ist stets charakterisiert durch $\psi = 80^\circ$, d. h. die Blochwand enthält die Achse $[0\ 1\ 1]$ und schließt mit der Ebene $(0\ \bar{1}\ 1)$ einen Winkel von 80° ein, die gegen die Ebene $\{1\ 0\ 0\}$ um einen Winkel von $\pm 10^\circ$ geneigt sind. Diese Blochwände haben aber nur eine um 14,5% größere Energiedichte als jene vom Typus I. (Vgl. die Differenz der Minima der Kurven „b“ in Abb. 8 und 9.)

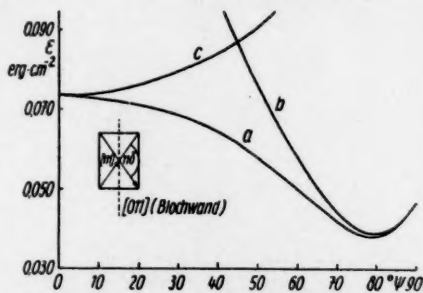


Abb. 10. Energie der 110°-Blochwand in Nickel, in Abhängigkeit von der Neigung zur $\{110\}$ -Ebene (Kurve a)

Zusammenfassung

Es wird die Energiedichte für beliebige Lagen der 180°-Blochwände in Eisen und Nickel berechnet, ferner die Energiedichten für beliebige Lagen der 90°-Blochwand in Eisen, sowie für die 70°- und 110°-Blochwände in Nickel. Diese Energien werden für alle möglichen Lagen der Blochwände im

Kristall berechnet, wobei die Kristallenergie in zweiter Näherung berücksichtigt wird.

Im Innern des Eisens vorteilhaftesten 90° -Blochwände für $\psi = 0^\circ$ haben eine Energie von $0,930 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2}$. Die Zick-Zack-Blochwände, welche an der Oberfläche beobachtbar sind, haben eine nur um wenig höhere Energie von $1,325 \text{ erg cm}^{-2}$. Die höchste Energiedichte weisen die 180° -Blochwände auf. Für Eisen ist das Verhältnis dieser drei Energiedichten $1:1,425:1,960$.

Weiter ist noch eine 180° -Zick-Zack-Blochwand möglich, mit einer relativen Energiedichte von 2,56 und einem Absolutwert von $2,405 \text{ erg cm}^{-2}$.

Bei Nickel können auftreten:

Eine 71° -Blochwand mit $\psi = 0^\circ$ im Materialinneren mit einer Energiedichte von $0,0174 \text{ erg cm}^{-2}$. Die 71° -Zick-Zack-Blochwand $\psi = 48^\circ$ mit einer Energiedichte von $0,0333 \text{ erg cm}^{-2}$. Die 110° -Zick-Zack-Blochwand mit $\psi = 80^\circ$ mit $0,0390 \text{ erg cm}^{-2}$. Die 110° -Blochwand mit $\psi = 0^\circ$ hat eine Energiedichte von $0,0731 \text{ erg cm}^{-2}$.

Ebenso wie bei Eisen weisen auch die 180° -Blochwände eine bedeutend höhere Energiedichte auf: $0,0903 \text{ erg cm}^{-2}$. Die höchste Energiedichte besitzt bei Nickel die in der $\{211\}$ -Ebene liegende 180° -Blochwand mit $0,0974 \text{ erg cm}^{-2}$.

Für Nickel verhalten sich die Energiedichten wie $1:1,91:2,24:4,20:5,10:5,60$.

Prag, Hochschule für Verkehrswesen.

Bei der Redaktion eingegangen am 16. März 1959.

An S
gehalt a
gegenüb
den Zus
sprechen
(nahe de
standes

Unte
in aufg
Silber m
lichkeit
Form zu
gestattet
oder Sele
des Diff
berichter

Durch
gefallen,
Konzent
Strahlung
weiterlau

Zur
mit eine
gegenüb

¹⁾ 6.
Physik (6
²⁾ G.
Ann. Phy
377 (1954
schichten
ten VII)
³⁾ G.
⁴⁾ G.

Untersuchungen an Silber—Selen-Schichten¹⁾

Von Gerhard Kienel

Mit 6 Abbildungen

Inhaltsübersicht

An Selen-schichten mit Silberzusätzen wird in Abhängigkeit vom Prozentgehalt an Silber der spezifische elektrische Widerstand und die Thermokraft gegenüber Gold gemessen. Es zeigen sich dabei an vier Stellen Maxima, die den Zusammensetzungen AgSe_2 , AgSe , Ag_3Se_2 und Ag_2Se weitgehend entsprechen. Dem Thermoelement (Strahlungsempfänger) $\text{Au}/72\% \text{ Ag} + 28\% \text{ Se}$ (nahe der Zusammensetzung von Ag_2Se) kann wegen des geringeren Widerstandes der Zusammensetzung die größte Leistung entnommen werden.

I. Einleitung

Untersuchungen an Silber—Tellur und Silber—Selen²⁾ haben gezeigt, daß in aufgedampfte Tellur- oder Selen-schichten überlappend aufgedampft Silber mit relativ großer Geschwindigkeit hineindiffundiert, wobei die Möglichkeit besteht, Verbindungsbildungen in räumlich auseinandergezogener Form zu beobachten. Dieser als Membratimreaktion³⁾ bezeichnete Ablauf gestattet, Untersuchungen an nebeneinanderliegenden Schichten aus Tellur oder Selen mit verschiedener Silberkonzentration anzustellen. Über Messungen des Diffusionsverlaufes von Selen in Silber wurde bereits früher von uns berichtet⁴⁾.

Durch die Diffusion des Silbers entstehen Schichten mit Konzentrationsgefällen, und an den Grenzen dieser Zonen bilden sich mehr oder weniger große Konzentrations-sprünge aus, die als „Lötstellen“ für Thermoelemente zur Strahlungsmessung Verwendung finden können. Der Vorgang der lange Zeit weiterlaufenden Diffusion bedingt jedoch eine Inkonzanz dieser Empfänger.

Zur Feststellung, welche Konzentration von Silber in Selen zusammen mit einem Metall als zweitem Partner, das den Diffusionserscheinungen gegenüber indifferent sein muß, die größte Thermokraft aufweist, wurde von

¹⁾ 6. Mitteilung über Strahlungsempfänger. [5. Mitteilung: H. Reimann, Ann. Physik (6) 16, 59 (1955).]

²⁾ G. C. Mönch, Ann. Physik (6) 14, 363 (1954) (Zweistoffschichten I); Th. Mohr, Ann. Physik (6) 14, 367 (1954) (Zweistoffschichten II); Th. Mohr, Ann. Physik (6) 14, 377 (1954) (Zweistoffschichten III); U. Zoril, Ann. Physik (6) 14, 385 (1954) (Zweistoffschichten IV); (6) 16, 7 (1955) (Zweistoffschichten VI); (6) 16, 27 (1955) (Zweistoffschichten VII).

³⁾ G. C. Mönch, Naturwiss. 41, 550 (1954).

⁴⁾ G. Kienel, Ann. Physik (6) 16, 1 (1955) (Zweistoffschichten V).

den bisherigen Beobachtungen an Konzentrationsgefällen abgegangen und Untersuchungen an aufgedampften dünnen, möglichst homogenen Selen-schichten mit verschieden starker Silberkonzentration angestellt. Die Messungen bestimmten die Leitfähigkeit und die Thermospannung an den Lötstellen, die sich durch Anbringung von Goldelektroden an den Silber-Selenschichten ergaben. Gold erwies sich dabei als vorteilhaft, weil eine Diffusion dieses Edelmetalles in Selen und umgekehrt nicht beobachtet werden konnte.

Das für die Versuche benutzte Gold und Silber hatte einen Reinheitsgrad von 99,96%. Für Selen wurde zum Teil käufliches Stangenmaterial verwendet, das nach mehrmaligem Umschmelzen auch noch im Vakuum destilliert wurde. Für die Endversuche kam nur spektralreines Selen der Firma Johnson-Matthey & Co., London, zur Verwendung.

Zur Feststellung der prozentualen Zusammensetzung mußten die Dicken der durch Kondensation auf ein Trägermaterial erhaltenen Silber- und Selen-schichten bestimmt werden. Die hierfür benutzten Verfahren gibt der folgende Abschnitt an.

II. Konzentrationsbestimmung

Da die Silber-Selenschichten durch Verdampfen im Vakuum hergestellt wurden, ergab sich die Möglichkeit, die verdampften Silber- und Selenmengen nebenbei als besondere auf Glasplatten niedergeschlagene Schichtdicken durch Messung unter dem Interferenzmikroskop⁵⁾ zu bestimmen. Sind $d(\text{Ag})$ und $d(\text{Se})$ sowie $s(\text{Ag})$ und $s(\text{Se})$ die Schichtdicken und Dichten der aufgefundenen Silber- und Selenschichten, so ist die in Gewichtsprozenten gemessene Menge an Silber in dem durch Überlagerung beider Schichten hergestellten Silber-Selen-Gemisch gleich:

$$\text{Gewichtsanteil an Ag} = \frac{d(\text{Ag}) \cdot s(\text{Ag}) \cdot 100}{d(\text{Ag}) \cdot s(\text{Ag}) + d(\text{Se}) \cdot s(\text{Se})} [\%].$$

Da häufig die Dichte von Aufdampfschichten von der Schichtdicke abhängig ist, wurde die jeweilige in mg gemessene verdampfte Substanzmenge bestimmt und die nach dem Verdampfen mit ihr erhaltene Schichtdicke bei stets gleichem Abstand der Fängerplatte von der Verdampfungsquelle ermittelt. Wie Abb. 1 zeigt, besteht sowohl bei Silber als auch bei Selen Proportionalität zwischen Dicke der Aufdampfschicht und der verdampften Stoffmenge. Dies besagt, daß für alle hergestellten Schichtstärken die Dichte gleich groß ist.

Die beiden für Silber und Selen erhaltenen Geraden gestatten aber auch die Berechnung der Dichte des Selen aus ihren Neigungen zur Abszissenachse, sofern die des Silbers als bekannt vorausgesetzt wird.

Donaldson und Khamsavi⁶⁾ bestimmten die Dichte dünner Silberschichten und fanden sie bis zur Dicke von 12 m μ herab gleich 10,5 g · cm⁻³.

⁵⁾ Hierzu wurde ein Interferenzmikroskop der Firma Wittge, Miersdorf, benutzt, die Interferenzstreifen nach Ausscheidung der ungleichen Phasensprünge an den Oberflächen Silber-Glas bzw. Selen-Glas durch nochmaliges Überdampfen von Silber bzw. Selen photographisch aufgenommen und mit dem Schnellphotometer der Firma VEB C. Zeiss Jena, ausgemessen.

⁶⁾ W. K. Donaldson u. A. Khamsavi, Nature **159**, 228 (1947).

in Übereinstimmung mit der des kompakten Silbers. Damit berechnet sich die Dichte des auf einen mit flüssigem Stickstoff gekühlten Objektträger aus Glas aufgedampften Selen zu $3,47 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, die des mit einer ungekühlten Platte aufgefängenen Selen zu $3,99 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Da die Kondensationsbedingungen im Fall des Selen nicht identisch mit denen des Silbers sein werden, wird der Meßwert mit einem in seiner Größe schwer abschätzbaren Fehler behaftet sein. Der größeren Sicherheit wegen wurde eine weitere kolorimetrische Dickenbestimmung nach Meyer und Garn⁷⁾ vorgenommen.

Die aus einer in Flächengröße und Dicke ausgemessenen Selen-schicht hergestellte Lösung unbekannten Selengehaltes und die Eichlösung mit definierter Selenmenge enthielten weniger als 0,5% Selendioxyd. Für diese Mengen ist sowohl das Lambert'sche als auch das Beersche Gesetz erfüllt. Die Messungen mit dem Pulfrich-Photometer ergaben Selendichten (Mittelwerte) von $s(\text{Se}) = 3,25 \pm 0,15 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ auf gekühlten Auffangflächen und $s(\text{Se}) = 3,84 \pm 0,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ auf ungekühlten Trägerplatten. Da die kolorimetrische Bestimmung als genauer angesehen werden muß, wird bei nachfolgenden Berechnungen des prozentualen Silberanteiles der Selen-schicht stets die Dichte zu $3,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ angenommen.

Die Dichte der aufgedampften Selen-schichten ist also wesentlich geringer als die des kompakten Materials, für das $s(\text{Se}) = 4,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ bei 20°C angegeben wird⁸⁾.

III. Versuchsanordnung

Als Träger der Silber—Selen-schichten diente ein an seinen

⁷⁾ J. Meyer u. W. v. Garn, Z. analyt. Ch. 53, 29 (1914).

⁸⁾ Da durch hohe Temperaturen die Platzwechselvorgänge unterstützt, bei tiefen erschwert werden, wird die Packungsdichte und damit auch die Dichte des bei höheren Temperaturen niedergeschlagenen Selen größer sein.

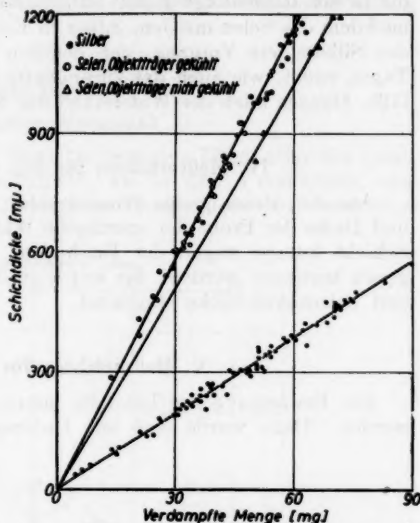


Abb. 1. Die interferentiell gemessene Dicke im Vakuum auf Glas kondensierter Silber- und Selen-schichten in Abhängigkeit von der verdampften Substanzmenge bei 7 cm Abstand des Auffängers von der Verdampfungsquelle

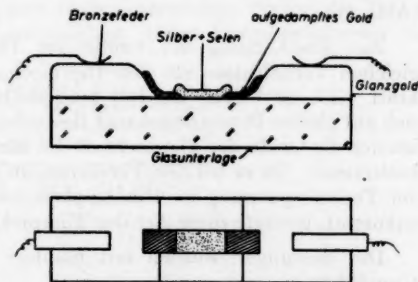


Abb. 2. Aufbau der Thermoelemente (Seitenansicht und Aufsicht)

beiden Enden mit aufgebrannten Goldschichten als Elektroden versehener Objektträger aus Glas. Die Abb. 2 zeigt die Form der auf tiefgeköhlten Glasplatten⁹⁾ im Hochvakuum ($<10^{-6}$ Torr) niedergeschlagenen Schichten, die in der Reihenfolge Gold, Silber und Selen aufgedampft wurden. Sofort nachdem das Selen mit dem Silber in Kontakt kam, begann die Eindiffusion des Silbers, ein Vorgang, der deutlich sichtbar ist und nach ein bis zwei Tagen endet, wie auch das sprunghafte Ansteigen der Leitfähigkeit erkennen läßt. Danach blieb der Widerstand der Schicht über Monate konstant.

IV. Meßverfahren für den spezifischen Widerstand

Aus der Messung des Widerstandes wurde bei bekannter Länge, Breite und Dicke der Probe der spezifische Widerstand ρ berechnet. Die Dicke der Schicht konnte wegen der Rauigkeit der Oberfläche nicht interferentiell genau bestimmt werden. Sie wurde in die Rechnung als Summe der Silber- und Selen-schichtdicke eingesetzt.

V. Meßverfahren für die Thermokraft

Zur Erwärmung der Lötstelle konnte nur absorbiertes Licht verwendet werden. Dazu wurde eine mit Unterspannung betriebene Autolampe auf

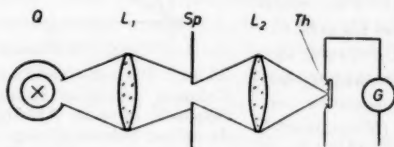


Abb. 3. Anordnung zur Messung der Thermospannung. Q : Lichtquelle; L_1 , L_2 : Linsen; Sp : Spalt; Th : Thermoelement; G : Galvanometer

einen Spalt und dieser auf die Lötstelle abgebildet und auf den Maximalauschlag eines Galvanometers ($R_i = 1005 \Omega$; $7,73 \cdot 10^{-10}$ Amp/Skt.) einjustiert (Abb. 3).

Zur Abschätzung der Größe der Thermokraft wurden die annähernd gleichen Verhältnisse mit den Thermoelementen Wismut/Antimon (Thermokraft $1,17 \cdot 10^{-4}$ Volt \cdot Grad $^{-1}$) hergestellt. Die gleichen Verhältnisse bezogen sich auf gleiche Dimensionen und Beleuchtungsstärken. Diese Parallelversuche können die Größe der Thermokraft des Elementes Au/Se + Ag nur angenähert bestimmen. Da es bei den Versuchen im wesentlichen auf die relative Größe der Thermospannung in Abhängigkeit von der Silberkonzentration im Selen ankommt, genügte diese Art der Thermokraftbestimmung.

Die Messungen wurden mit blanken und mit geschwärzten Elementen ausgeführt.

⁹⁾ Über die Verdampfungsanordnung vgl. G. Kienel a. a. O.

Da
stelle d
strahlu
stelle
berechn

In
fische
Maxim

Verbin
zu ent

Da nun sowohl für die geschwärzte als auch für die ungeschwärzte Lötstelle die Thermokraft die gleiche sein muß, läßt sich aus dem bei gleicher Bestrahlung gemessenen Spannungsunterschied die durch Schwärzung der Lötstelle und entsprechend erhöhte Absorption erzeugte Temperaturerhöhung berechnen. Sie betrug 1,8 °C.

VI. Meßergebnisse

a) Spezifischer Widerstand

In einem Intervall von 30 bis 75 Gewichtsprozenten Silber zeigt der spezifische Widerstand der Silber—Selen-Schicht, wie in Abb. 4 ersichtlich, vier Maxima. Sie liegen annähernd bei Zusammensetzungen, die den chemischen

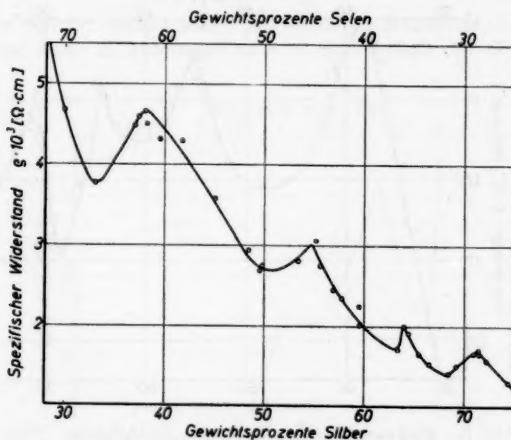


Abb. 4. Spezifischer elektrischer Widerstand von Selen—Silber-Schichten in Abhängigkeit von der Silberkonzentration

Verbindungen AgSe_2 , AgSe , Ag_3Se_2 und Ag_2Se entsprechen, wie aus der Tab. 1 zu entnehmen ist. Wegen der Ungenauigkeit dieser Übereinstimmung ist

Tabelle 1
Zusammensetzung von Selen—Silber-Kombinationen, Prozentgehalt an Ag und Se¹⁰⁾

Verbindungen	Ag in %	Se in %
Ag_2Se	73,2	26,8
Ag_3Se_2	67,2	32,8
AgSe	57,7	42,3
AgSe_2	40,5	59,5

¹⁰⁾ M. Hansen, „Der Aufbau der Zweistofflegierungen“, Berlin 1936.

zu bedenken, daß die Aussage über die prozentuale Zusammensetzung der Schicht stark von dem Wert für die Dichte der aufgedampften Selschicht abhängt. Wird für sie $3,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ statt $3,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ angenommen, so berechnen sich die Schichtzusammensetzungen zu 73, 66, 57 und 40%, Werte, die gut mit den „Sollwerten“ der Tab. 1 übereinstimmen.

b) Thermokraft

Die Thermokraft an den Lötstellen Gold/Selen + Silber ergaben in Abhängigkeit von dem Silberanteil die in Abb. 5 wiedergegebene Kurve. Auch sie zeigt noch ausgeprägter als die Widerstandskurve vier charakteristische

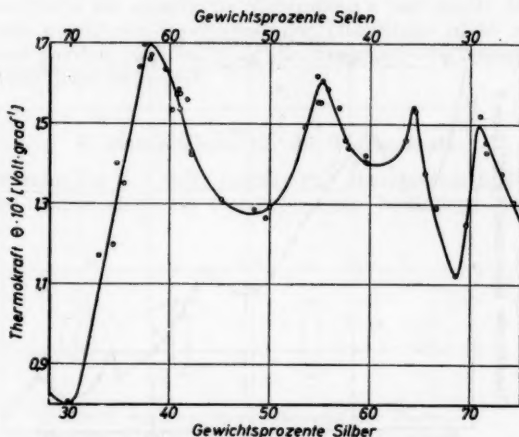


Abb. 5. Thermokraft des Elementes Gold/Selen + Silber in Abhängigkeit von der Silberkonzentration

Maxima. Da sie an den gleichen Stellen liegen, entsprechen auch sie den Verbindungen AgSe_2 , AgSe , Ag_3Se_2 und Ag_2Se .

Von diesen Verbindungen ist nur Ag_2Se bekannt (vgl. Hansen¹⁰). Es soll auch hier nicht behauptet werden, daß tatsächlich andere Verbindungen vorlagen. An den Maximastellen kann auch nur ein Ordnungszustand (Überstruktur) vorgelegen haben.

Das gleichzeitige Auftreten von Maxima in den Widerstands- und Thermospannungskurven belegt wie auch andere Versuche am Kupferoxydul¹¹⁾ den engen Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Thermokraft.

Um die ungefähre Empfindlichkeit der Lötstelle Au/Se + Ag als Strahlungsempfänger festzustellen, wurde sie berußt und mit einer Hefnerkerze

¹¹⁾ G. Kienel, Diplomarbeit (unveröffentlicht), Halle/S. 1953.

bestrahlt. Es ergab sich bei einer Entfernung von 100 cm der Hefnerkerze eine Spannung von $2,6 \cdot 10^{-7}$ Volt.

c) Leistung des Thermoelementes

Bei der Verwendung von Thermoelementen als Strahlungsempfänger ist die Größe der Thermokraft schon von Bedeutung, aber nicht sie allein. Es kommt auch auf den durch die spezifische Leitfähigkeit der verwendeten Stoffe bedingten inneren Widerstand des Empfängers an. Ein Ausdruck für die Leistung eines Thermoelementes ist der Quotient aus dem Quadrat der Thermokraft Θ und dem Widerstand R des Thermoelementes, also

$$L = \Theta^2 / R.$$

Wird aus den für Abb. 4 und 5 verwendeten Meßdaten die Größe von L berechnet und diese in Abhängigkeit vom Silbergehalt der Selen-schicht auf-

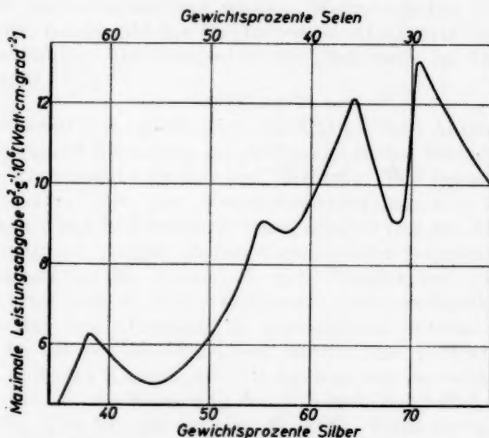


Abb. 6. Maximale Leistungsabgabe des Thermoelementes Gold/Selen + Silber in Abhängigkeit von der Silberkonzentration

getragen, so ergibt sich, wie Abb. 6 zeigt, gleichfalls eine Kurve mit vier Maxima. Die größte Leistung wird in der Reihenfolge Ag_2Se , Ag_3Se_2 , AgSe und AgSe_2 erreicht.

Vergleicht man die numerischen Werte der Leistung mit anderen Thermoelementzusammenstellungen wie etwa mit dem des Elementes Wismut—Antimon, so ergibt sich, wie es meist bei Halbleiterkombinationen der Fall ist, daß die hohe Thermokraft infolge des hohen Widerstandes doch keine Leistungssteigerung hervorruft, selbst wenn das Gold durch einen günstigeren Partner ersetzt werden sollte, da sich $L = \Theta^2 \cdot \rho^{-1}$ für Bi/Sb bei Annahme von

$\Theta = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ Volt} \cdot \text{Grad}^{-1}$ und von $\rho = 1,110^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$ zu etwa $L = 1 \cdot 10^{-4}$ berechnet, während L für Gold/Ag₂Se den Wert $1,3 \cdot 10^{-5}$ ergibt.

Herrn Prof. Dr. G. C. Mönch danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wohlwollende Unterstützung.

Halle (Saale), II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 29. Mai 1959.

Elek

Im
Forme
erstma
nungs
begon
Result
die em
Tabell

Ein
von F
nengru
K-L-
durch
Elektr
höhere
quant
Unreg
finden
Schale
und b
statt
hat zu
erklär
mutal

Di
eine I

1)
2)
Springe

Elektronengruppen im periodischen System der Elemente in der statistischen Theorie des Atoms

Von T. Tietz

Mit 1 Abbildung

Inhaltsübersicht

Im Anschluß an eine Arbeit von Theis geben wir hier eine analytische Formel für die untere Grenze der Z -Werte, bei der s -, p -, d -, f -Elektronen erstmalig in Erscheinung treten. Unsere analytische Formel gibt die Ordnungszahlen, bei welchen mit dem Einbau der s -, p -, d -, f -Elektronengruppen begonnen wird; recht befriedigend wieder. Weiter ergeben die numerischen Resultate für die Gesamtzahl der Elektronen im Atom gute Mittelwerte über die empirischen Zahlen. Die Gesamtheit der Elektronen im Atom ist in einer Tabelle dargestellt.

Eine der schönsten Anwendungen des statistischen Atommodells ist die von Fermi¹⁾ gegebene Erklärung der Anomalien in der Bildung von Elektronengruppen im periodischen System der Elemente. Wie bekannt, werden die K - L - M - N -Schalen mit den Hauptquantenzahlen $n = 1, 2, 3, 4$ nicht durchweg sukzessiv mit Elektronen besetzt, sondern das neu hinzukommende Elektron bevorzugt an einigen Stellen einen s - oder p -Quantenzustand mit höherer Hauptquantenzahl, obwohl in den Schalen mit tieferen Hauptquantenzahlen noch freie d - oder f -Quantenzustände vorhanden sind. Diese Unregelmäßigkeiten des Atombaus im periodischen System der Elemente finden sich z. B. bei der M -Schale (der Einbau der p -Elektronen der M -Schale beginnt nicht bei Kalium, $Z = 19$, sondern erst bei Scandium, $Z = 21$) und bei der N -Schale (die Besetzung der N -Schale mit f -Elektronen beginnt statt bei Indium, $Z = 49$, erst bei Cer, $Z = 58$). Diese Unregelmäßigkeiten hat zuerst Fermi auf Grund des statistischen Atommodells sehr befriedigend erklärt. Für die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit mit der azimutalen Quantenzahl k ergibt sich

$$\varrho_k = \frac{2}{h^3} 2 (p_\mu^2 - p_k^2)^{1/2} 2\pi p_k (p_{l+1} - p_l). \quad (1)$$

Die Gesamtzahl der Elektronen im Atom, N_k , erhält man hieraus durch eine Integration über den Raum²⁾.

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{8}{h} k \int \left[p_\mu^2 - \left(\frac{h}{2\pi r} \right)^2 k^2 \right]^{1/2} dr \\ &= 2 \left(\frac{6Z}{\pi^2} \right)^{1/2} k \int \left[x \varphi_0(x) - \left(\frac{4}{3\pi Z} \right)^{1/2} k^2 \right]^{1/2} \frac{dx}{x}, \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ E. Fermi, Z. Physik 48, 79 (1928) sowie Nature (London) 121, 502 (1928).

²⁾ P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien, Springer-Verlag 1949.

wo man für die s -, p -, d -, ... Elektronen bzw. $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ zu setzen hat und die Integration über alle positive Werte von r bzw. x zu erstrecken ist, für die der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Die dimensionslose Variable x hat die Bedeutung

$$x = \frac{r}{\mu}, \quad \text{mit } \mu = \frac{1}{4} \left(\frac{9 \pi^2}{2 Z} \right)^{1/3} a_0, \quad (3)$$

wo a_0 den kleinsten Bohrschen Wasserstoffradius und Z die Ordnungszahl des Atoms darstellt. In (2) bezeichnet $\varphi_0(x)$ die Thomas-Fermische Funktion für das freie neutrale Atom. Neuerdings wurden die Resultate von Fermi insbesondere die Bestimmungsweise der Ordnungszahlen, bei welchen die s - p - d -... Elektronen erstmalig in Erscheinung treten, durch Jensen und Luttinger³⁾ angezweifelt und zwar deswegen, weil in Anbetracht der kontinuierlichen Drehimpulsverteilung im statistischen Atom diese Ordnungszahlen nur mit einer gewissen Willkür berechnet werden können. In neuester Zeit hat Theis⁴⁾ gezeigt, daß im Gegensatz zur Anschauung von Jensen und Luttinger eine willkürfreie Einteilung des Impulsraumes nach Eigenwerten möglich ist. Aus der statistischen Theorie von Thomas-Fermi läßt sich folgende Beziehung zwischen der Zahl $N(L^2)$ der Teilchen mit einem Bahndrehimpulsquadrat größer als L^2 und der radialsymmetrischen räumlichen Dichte aller Teilchen $\varrho(r)$, wo

$$\varrho = \frac{Z}{4 \pi \mu^3} \left(\frac{\varphi_0}{x} \right)^{3/2} = \frac{Z}{4 \pi \mu^3} \frac{\varphi_0''}{x}, \quad (4)$$

unmittelbar herleiten

$$N(L^2) = \int \left\{ r^2 \varrho^{1/2}(r) - \frac{L^2/\hbar^2}{(3 \pi^2)^{1/2}} \right\}^{1/2} \frac{4 \pi}{r} dr. \quad (5)$$

Eine willkürfreie Bestimmung der Intervallgrenzen des L^2 -Bereiches und entsprechender Bereiche anderer Operatoren wird im wesentlichen durch Mitberücksichtigung der Entartungsgrade der betreffenden Eigenwerte möglich. Man erhält nach Theis⁴⁾ mit Gl. (5) für die Zahl N_l der Teilchen, denen der Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ zugeordnet wird, eindeutig

$$N_l = N(l^2 \hbar^2) - N((l+1)^2 \hbar^2). \quad (6)$$

Hierin ist l die Nebenquantenzahl $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Die Integrale (2) und (5) lassen sich für die exakte Thomas-Fermi-Funktion $\varphi_0(x)$ nur numerisch berechnen. Um eine analytische Formel für die N_k bzw. N_l zu erhalten, ersetzen wir in (2) bzw. in (6) die Thomas-Fermi-Funktion $\varphi_0(x)$ durch unsere Approximation⁵⁾:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(1 + a x)^2}, \quad \text{mit } a = \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Die Funktion N_k hat in unserem Falle folgende Form⁶⁾.

$$N_k = 4 (6 Z)^{1/2} k \left[1 - \left(\frac{4}{3 Z} \right)^{1/2} k \right], \quad \text{mit } k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (8)$$

³⁾ J. H. D. Jensen u. J. M. Luttinger, Physic. Rev. **86**, 907 (1952).

⁴⁾ W. R. Theis, Z. Physik **140**, 1 (1955).

⁵⁾ T. Tietz, Ann. Physik **15**, 186 (1955).

⁶⁾ T. Tietz, Acta Phys. Hung. **IX**, 73 (1958).

Die Gesamt

Z	
5	
6	
10	
15	
16	
20	
21	
22	
24	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
55	*
58	
59	
60	
65	
70	
80	
90	
100	

Für die F

N_l

mit

In Tab
Resultate
Ordnungsz

Man er
und N_l si
scheiden.
gleich zu
experimen
theoretisch
dargestellt

Wie zu
retischen
die empiri
mehrfach
gegeben w
wie aus T
eine etwas
pirischen F

Tabelle 1

Die Gesamtzahlen der Elektronen N_k nach Gl. (8) und N_l nach Gl. (9) als Funktion der Ordnungszahl

Z	$N_{1/2}$	$N_{1/2}$	$N_{1/2}$	$N_{1/2}$	N_0	N_1	N_2	N_3
5	4,2	0,7	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0	0,0
6	4,8	1,8	0,0	0,0	4,0	1,2	0,0	0,0
10	5,8	5,5	0,0	0,0	5,2	4,8	0,0	0,0
15	7,0	8,8	0,0	0,0	6,3	8,2	0,0	0,0
16	7,2	9,5	0,0	0,0	6,5	8,8	0,0	0,0
20	8,0	11,6	0,0	0,0	7,2	10,9	0,0	0,0
21	8,0	12,1	0,1	0,0	7,4	11,4	0,0	0,0
22	8,2	12,6	0,9	0,0	7,5	11,9	0,3	0,0
24	8,5	13,5	2,4	0,0	7,8	12,8	1,7	0,0
25	8,6	13,9	3,1	0,0	8,0	13,2	2,5	0,0
30	9,3	15,9	6,5	0,0	8,6	15,2	5,8	0,0
35	9,9	17,7	9,4	0,0	9,2	17,0	8,8	0,0
40	10,4	19,3	12,1	0,0	9,8	18,6	11,5	0,0
45	11,0	21,1	15,2	0,0	10,3	20,1	14,0	0,0
50	11,4	22,2	16,9	0,0	10,7	21,5	16,3	0,0
55	11,8	23,5	19,1	0,0	11,2	22,8	18,4	0,0
58	12,1	24,2	20,3	0,5	11,4	23,5	19,7	0,0
59	12,1	24,4	20,7	1,0	11,5	23,8	20,1	0,4
60	12,2	24,7	20,8	1,6	11,6	24,0	20,5	0,9
65	12,6	25,9	23,0	4,3	12,0	25,2	22,4	3,6
70	13,0	26,9	24,9	6,8	12,3	26,3	24,2	6,2
80	13,7	29,0	28,3	11,6	13,0	28,3	27,6	11,0
90	14,3	30,9	31,4	16,0	13,6	30,2	30,8	15,4
100	14,9	32,6	34,3	20,0	14,2	31,9	33,7	19,4

Für die Funktion N_l erhalten wir:

$$N_l = (8/3) [l^2 - (l+1)^3] + (48Z)^{1/2} [(l+1)^2 - l^2], \quad (9)$$

mit $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

In Tab. 1 haben wir die numerischen Resultate über N_k und N_l für verschiedene Ordnungszahlen (Z) zusammengestellt.

Man erkennt, daß die Funktionen N_k und N_l sich ein wenig voneinander unterscheiden. Der Betrag von N_k ist im Vergleich zu N_l etwas zu groß. Der Gang der experimentellen Werte von N_l und der theoretischen Werte von N_l ist in Abb. 1 dargestellt.

Wie zu ersehen, entsprechen die theoretischen Kurven guten Mittelwerten über die empirischen Resultate, die durch die mehrfach gebrochenen Kurvenzüge wiedergegeben werden. Die N_l -Funktionen geben, wie aus Tab. 1 und Abb. 1 zu ersehen ist, eine etwas bessere Anpassung an die empirischen Resultate als die N_k -Funktionen.

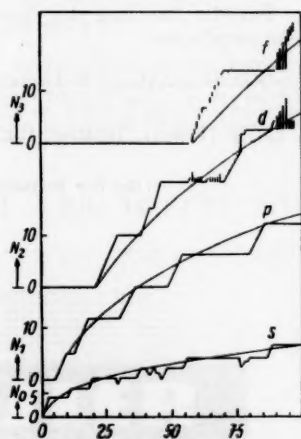


Abb. 1. Bahndrehimpulsverteilung der Elektronen im Atom. Treppenkurven: Empirische Besetzungszahlen der Bahndrehimpulseigenwerte (senkrechte Striche verbinden empirisch mögliche Werte). Glatte Kurve, theoretische Besetzungszahlen

In Tab. 2 sind die Ordnungszahlen dargestellt, bei welchen die s -, p -, d -, ... Elektronen erstmalig in Erscheinung treten.

Ersichtlich liefert die Funktion N_k etwas bessere Werte als die Funktion N_l . Die Ordnungszahlen N_k , bei welchen die s -, p -, d -, ... Elektronen erstmalig in Erscheinung treten, stimmen gut mit den empirischen Ordnungszahlen überein. Iwanenko und Larin⁷⁾ haben auf anderem Wege für das erstmalige

Tabelle 2
Die untere Grenze der Z -Werte, bei der s -, p -, d - und f -Elektronen erstmalig in Erscheinung treten

	Die untere Grenze der Z -Werte für			
	s - Elektronen	p - Elektronen	d - Elektronen	f - Elektronen
Erfahrung	1	5	21	58
nach Fermi numerische Werte	1	5	21	55
nach Theis numerische Werte	—	—	—	55
Iwanenko und Larin	1	5	20	54
Gl. (8)	1	5	22	59
Gl. (9)	1	6	22	60

Auftreten der s -, p -, d -, ... Elektronen einen analytischen Ausdruck abgeleitet. Die Resultate dieser Arbeit zeigen, daß unsere Näherungsformeln für N_l und N_k eine recht befriedigende Erklärung der Anomalien im periodischen Systems geben können.

Für die Sendung der Sonderabdrücke bin ich Herrn Dr. W. R. Theis sehr verpflichtet.

⁷⁾ D. Iwanenko u. S. Larin, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88, 45 (1953).

Łódź (Polen), Institut für Theoretische Physik der Universität Łódź.

Bei der Redaktion eingegangen am 13. Juli 1959

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 78 51. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 272/59

Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingsgebilde

Von Dr. phil. Dr. rer. nat. h. c. HEINRICH HECHT, Kiel

4., neubearbeitete Auflage

VIII, 176 Seiten mit 36 Abbildungen im Text. 1959. Gr. 8° DM 16.—, Ln. DM 17.50

„Hatte das Buch schon bei seinem ersten Erscheinen berechtigten Anklang und wohlwollende Aufnahme in der Fachwelt gefunden, so wird das für die neue Auflage in erhöhtem Maße der Fall sein. Die Darstellung ist konzentrierter und klarer geworden. Dem Elektroingenieur wird durch die Art der Darstellung das Verständnis und die Behandlung mechanischer Schwingungsprobleme erleichtert, da er gewohnt ist, in elektrischen Vorstellungen zu denken, und deshalb wird auch die neue Auflage gerade für diesen Kreis wieder ihre bewährte Zweckmäßigkeit unter Beweis stellen.“

Elektronische Rundschau

„Das vorliegende Werk richtet sich vor allem an die Hochschulstudenten, die sich auf dem Gebiet der Elektroakustik spezialisieren. Daneben ist es auch eine Fundgrube für die in der Praxis stehenden Ingenieure und Techniker, die sich wieder einmal mit den theoretischen Grundlagen ihres Arbeitsgebietes befassen möchten.“

A. Lauber in PTT Technische Mitteilungen

Die elektroakustischen Wandler

Von Dr. phil. Dr. rer. nat. h. c. HEINRICH HECHT, Kiel

4., neubearbeitete Auflage

XXIV, 330 Seiten mit 64 Abbildungen im Text. 1957. Gr. 8°

DM 34.80, Halbleinen DM 36.60

Die neue Auflage hat eine gründliche Überarbeitung und Erweiterung erfahren, insbesondere wurde die Darstellung der Grundbegriffe der Elektrizität und des Magnetismus, die nicht nur für die Behandlung und Lösung von Aufgaben und Problemen, die sich auf die elektroakustischen Wandler beziehen, von Bedeutung ist, weiter ausgebaut. Das Buch wird deshalb auch für manchen Leser, der an allgemeinen Fragen auf dem Gebiet der Elektrotechnik interessiert ist, von besonderem Wert und Nutzen sein.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG



PRESSLER

PHOTOZELLEN

DGL-PRESSLER LEIPZIG

KALENDER FÜR STERNFREUNDE 1960

Herausgegeben von Dr. PAUL AHNERT, Sternwarte Sonneberg.

191 Seiten mit 34 Abbildungen im Text. 1960, 8°. DM 4.—

Der Kalender enthält wieder die für die Beobachtungen erforderlichen Unterlagen für das Jahr 1960. Anschließend folgen: Mittlere Örter für 1960,0 von 35 hellen Sternen nördlich von $\delta = -40^\circ$ / Größenklassendifferenzen und Intensitätsverhältnisse, Entfernungsmodul / Elemente und Dimensionen von Sonne, Erde und Mond / Astronomische Konstanten / Die bis Oktober 1959 gestarteten Erdsatelliten / Der erste künstliche Planetoid Die letzten Weltraumsonden / Tafeln zur genäherten Berechnung der Mondphasen und der Finsternisse für fünfeinhalb Jahrtausende (-3000 bis 2499) / Neuere astronomische Arbeiten und Entdeckungen / Einige Meßergebnisse der künstlichen Satelliten / Die Ausdehnung der beobachtbaren Welt / Überlegungen zu dem Problem der Vielheit bewohnter Welten / Die sowjetische Astronomie seit dem Kriege / Die Mondkarte von W. G. Lohrmann / Verzeichnis von 222 hellen Doppelsternen / Nomogramm zur Ermittlung der Zenitdistanz / Vorlage zu einer drehbaren Sternkarte.

Wissenschaft und Fortschritt: Durch seine übersichtliche Form, den wissenschaftlich interessanten Inhalt und die Vielseitigkeit des Stoffes wird auch in diesem Jahr das Handbuch in Kreisen der Wissenschaftler und Amateure gern aufgenommen werden und neue Freunde finden.

G. Böttger

Astronomisch-chronologische Tafeln für Sonne, Mond und Planeten

Von Dr. PAUL AHNERT, Sonneberg/Thür.

42 Seiten mit 7 Abbildungen, 43 Tafeln und einem Zellophandeckblatt. 1960
Gr. 8°. DM 10.20

Die Tafeln geben dem Historiker und dem Liebhaberastronomen die Möglichkeit, mittels einfacher Rechnungen die Stellungen von Sonne, Mond und Planeten und die Finsternisse für die geschichtlich erfassbare Vergangenheit und einige künftige Jahrhunderte zu ermitteln. Ihre Benutzung erfordert keinerlei spezielle mathematische Kenntnisse, insbesondere sind Logarithmen und trigonometrische Formeln völlig vermieden worden. Die notwendigen Rechenoperationen bestehen nur aus Additionen und Subtraktionen. Trotz dieser Einfachheit geben die Tafeln für einen Zeitraum von fünfeinhalb Jahrtausenden die Örter von Sonne und Mond auf $\pm 0.1^\circ$ die Örter der Planeten auf $\pm 0.3^\circ$ und die Neu- und Vollmond- und damit die Finsterniszeiten auf ± 0.2 Stunden genau bekannt.

Eine ausführliche Anleitung und Übungsbeispiele sind beigegeben, um den Ungeübten in die Handhabung einzuführen.

Grundtatsachen der sphärischen Astronomie

Von Prof. Dr. habil. JULIUS DICK

Wissenschaftl. Leiter der Sternwarte Berlin-Babelsberg

IV, 103 Seiten mit 48 Abb. im Text. 1956. DIN A 5. DM 5.—, Hln. DM 6.—

Literaturanzeiger: Stoffauswahl und Darstellungsform dieses kurzgefaßten Lehrbuches sind darauf ausgerichtet, den für die Himmelskunde Interessierten, besonders auch Oberschüler und Studenten, anzusprechen. Der Verfasser hat es verstanden, die an das Anschauungs- und Denkvermögen einige Anforderungen stellende Materie in flüssigem Stil und möglichst Einfachheit klar darzustellen, wobei die zahlreichen Abbildungen gute Dienste leisten.

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG